

2023 届高三统一考试试题 数 学

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \mid \frac{3-x}{x} > 2\}$, 则 $\complement_{\mathbb{R}} A =$ B
- A. $\{x \mid x > 1\}$ B. $\{x \mid x \leq 0 \text{ 或 } x > 1\}$
 C. $\{x \mid 0 < x < 1\}$ D. $\{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 1\}$

2. 在复平面内,复数 z_1, z_2 对应的点分别是 $(2, -1), (0, 5)$, 则复数 $\frac{z_2}{z_1}$ 的虚部为 A
- A. 2 B. -2 C. -2i D. 2i

3. 函数 $f(x) = \frac{2 + \cos 2x}{\sin x}$ 的部分图象大致为 A



4. 过点 $(1, 2)$ 作直线, 使它与抛物线 $y^2 = 4x$ 仅有一个公共点, 这样的直线有 A
- A. 1 条 B. 2 条 C. 3 条 D. 4 条

5. 已知 A, B, C 为球 O 球面上的三个点, 若 $AB = BC = AC = 3$, 球 O 的表面积为 36π , 则三棱锥 $O-ABC$ 的体积为 C

- A. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{27\sqrt{2}}{4}$

6. “碳达峰”是指二氧化碳的排放不再增长, 达到峰值之后开始下降, 而“碳中和”是指企业、团体或个人通过植树造林、节能减排等形式, 抵消自身产生的二氧化碳排放量, 实现二氧化碳“零排放”。某地区二氧化碳的排放量达到峰值 a (亿吨) 后开始下降, 其二氧化碳的排放量 S (亿吨) 与时间 t (年) 满足函数关系式 $S = ab^t$, 若经过 4 年, 该地区二氧化碳的排放量为 $\frac{3a}{4}$ (亿吨), 已知该地区通过植树造林、节能减排等形式抵消自身产生的二氧化碳排放量为 $\frac{a}{3}$ (亿

【高三数学 第 1 页(共 4 页)】

- 吨), 则该地区要实现“碳中和”, 至少需要经过 (参考数据: $\lg 2 \approx 0.30, \lg 3 \approx 0.48$) D. 16 年
- A. 15 年 B. 11 年 C. 10 年
7. 2022 年男足世界杯于 2022 年 11 月 21 日至 2022 年 12 月 18 日在卡塔尔举行, 现要安排甲、乙等 3 名志愿者去 A, B, C 三个足球场服务, 要求每个足球场都有人去, 每人都只能去一个足球场, 则甲、乙两人被分在同一个足球场的安排方法种数为 D. 18
- A. 12 B. 18 C. 36
8. 已知 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + 1 = 2\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$, 则 D. $\beta = \alpha + \frac{\pi}{3}$
- A. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{6}$ B. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$ C. $\beta = \alpha + \frac{\pi}{6}$

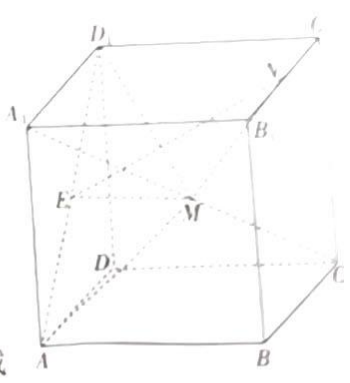
二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 将 $y = 2\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $f(x)$ 的图象, 则 $y = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$
- A. $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称
- C. $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{6}, 0)$ 对称 D. $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内是增函数

10. 为了解某班学生每周课外活动的时间, 甲同学调查了 10 名男生, 其平均数为 9, 方差为 11; 乙同学调查了 10 名女生, 其平均数为 7, 方差为 8. 若将甲、乙两名同学调查的学生合在一起组成一个容量为 20 的样本, 则该样本数据的
- A. 平均数为 8.5 B. 平均数为 8 C. 方差为 10.5 D. 方差为 10

11. 已知定义在 \mathbf{R} 上的奇函数 $f(x)$, $\forall m, n \in (0, +\infty)$, $f(mn) = f(m) + f(n)$, 且当 $x > 1$ 时, $f(x) < 0$. 则
- A. $f(1) = 0$ B. $f(x-2)$ 有三个零点
- C. $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数 D. 不等式 $xf(x-2) < 0$ 的解集是 $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

12. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是线段 AD_1 的中点, 点 M, N 满足 $\overrightarrow{A_1M} = \lambda \overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{B_1N} = \mu \overrightarrow{B_1C_1}$, 其中 $\lambda, \mu \in (0, 1)$, 则
- A. 存在 $\lambda \in (0, 1)$, 使得平面 $AD_1M \perp$ 平面 AB_1C
- B. 存在 $\lambda, \mu \in (0, 1)$, 使得平面 $MEN \parallel$ 平面 AB_1C
- C. 对任意 $\lambda, \mu \in (0, 1)$, MN 的最小值为 $\sqrt{2}$
- D. 当 $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{2}{3}$ 时, 过 E, M, N 三点的平面截正方体得到的截面多边形的面积为 $\frac{4\sqrt{10}}{3}$



三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知向量 $a = (m, -2)$, $b = (1, 3)$, 若 $(a-b) \perp b$, 则 $m =$ 16

14. 已知集合 $P = (0, 1) \cup (1, 2)$, 函数 $f(x)$ 满足不等式 $f(x) \cdot \ln x > 0$ 的解集为 P , 则函数 $f(x)$ \blacktriangle $f(x) = \frac{1}{x}$ (写出一个符合条件的即可)

15. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A, B , P 为 C 上一点, 若点 P 的纵坐标为 1, $|PA| = \sqrt{13}$, $|PB| = 2$, 则 C 的离心率为 \blacktriangle $\sqrt{10}$

16. 已知 x 是函数 $f(x) = 2a\sqrt{x} + b - c^3$ 的一个零点, 且 $x \in [\frac{1}{4}, c]$, 则 $a^2 + b^2$ 的最小值为 \blacktriangle $\frac{1}{4}$

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在数列 $\{a_n\}$ 中, $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = n^2 + n$.

(1) 求 a_n 的通项公式;

(2) 证明: $\frac{1}{3a_1} + \frac{1}{4a_2} + \dots + \frac{1}{(n+2)a_n} < \frac{1}{8}$.

$$\frac{1}{(n+2)a_n} = \frac{1}{(n+2)2n(n+1)} = \frac{1}{4(n+1)^2} - \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$$

18. (12 分)

某电视台举行冲关直播活动, 该活动共有四关, 只有一等奖和二等奖两个奖项, 参加活动的选手从第一关开始依次通关, 只有通过本关才能冲下一关. 已知第一关的通过率为 0.7, 第二关、第三关的通过率均为 0.5, 第四关的通过率为 0.2, 四关全部通过可以获得一等奖 (奖金为 500 元), 通过前三关就可以获得二等奖 (奖金为 200 元), 如果获得二等奖又获得一等奖, 奖金可以累加. 假设选手是否通过每一关相互独立, 现有甲、乙两位选手参加本次活动.

(1) 求甲获得奖金的期望;

(2) 已知甲和乙最后所得奖金之和为 900 元, 求甲获得一等奖的概率.

19. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 $a, b, c, c=1, b \cos C - \cos B = 1$.

(1) 证明: $B=2C$;

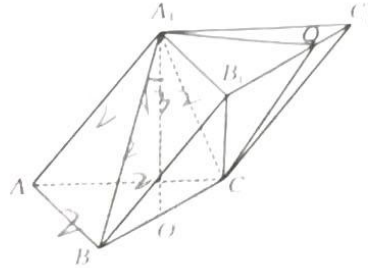
(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 求 a 的取值范围.

20 (12分)

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=AC=AA_1=2, AB \perp AC, O$ 为 BC 的中点.

(1) 证明: $A_1O \perp$ 平面 ABC .

(2) 已知 $AB=AC=2$, 在线段 B_1C_1 上(不含端点)是否存在点 Q , 使得二面角 $Q-A_1C-B_1$ 的余弦值为 $\frac{3}{5}$? 若存在, 确定点 Q 的位置; 若不存在, 请说明理由.



21 (12分)

已知 $ab \neq 0$, 曲线 $f(x) = \frac{3x}{a-x^2}$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $6x + by - 3 = 0$.

$y = \frac{3-6x}{b}$ $k = -\frac{6}{b}$

(1) 求 a, b 的值;

(2) 证明: 当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) < \tan x$.

22 (12分)

已知 O 为坐标原点, M 是椭圆 $C_1: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上的一个动点, 点 N 满足 $\overrightarrow{ON} = \sqrt{3} \overrightarrow{OM}$, 设点 N 的轨迹为曲线 C_2 .

(1) 求曲线 C_2 的方程.

(2) 若点 A, B, C, D 在椭圆 C_1 上, 且 $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$, AC 与 BD 交于点 P , 点 P 在 C_2 上. 证明: $\triangle PCD$ 的面积为定值.

原
与
线
内
不
能
改
画

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线