

# 数学试题

本试卷为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：1. 作答前，请考生务必把自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 作答时，务必将答案写在答题卡上，写在本试卷及草稿纸上无效。

3. 考试结束后，答题卡交回。

## 第 I 卷

一、选择题：本题共 8 小题、每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数  $z$  满足  $(1-2i)z = |2\sqrt{2} + i| - i$ ，则  $\bar{z}$  在复平面内对应的点位于（ ）

- A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限

2. 已知在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，则“ $\sin 2A = \sin 2B$ ”是“ $a = b$ ”的（ ）

- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充分必要条件      D. 既不充分也不必要条件

3. 已知抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  的准线过双曲线  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$  的一个焦点，则  $p =$ （ ）

- A. 1      B. 2      C. 4      D. 8

4. 林业部门规定：树龄 500 年以上的古树为一级，树龄 300~500 年之间的古树为二级，树龄 100~299 年的古树为三级，树龄低于 100 年不称为古树。林业工作者为研究树木年龄，多用年轮推测法，先用树木测量生长锥在树干上打孔，抽取一段树干计算年轮个数，由经验知树干截面近似圆形，年轮宽度依次构成等差数列。现为了评估某棵大树的级别，特测量数据如下：树干周长为 3.14 米，靠近树芯的第 5 个年轮宽度为 0.4cm，靠近树皮的第 5 个年轮宽度为 0.2cm，则估计该大树属于（ ）

- A. 一级      B. 二级      C. 三级      D. 不是古树

5. 已知函数  $y = f(x) (x \in \mathbf{R})$  如满足： $f(x+3) = -f(x)$ ， $f(-x) + f(x) = 0$ ，且  $x \in [-3, 0)$  时，

$f(x) = \log_8(x+4)$ ，则  $f(2024) =$ （ ）

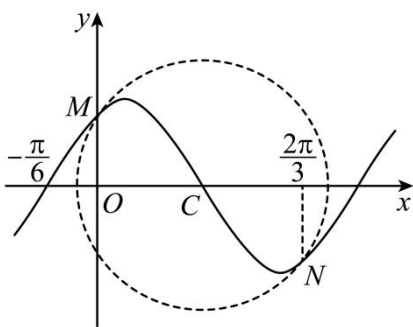
- A. -3      B.  $-\frac{1}{3}$       C. 0      D.  $\frac{1}{3}$

6. 在正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中， $AB = 2$ ， $AA_1 = 3$ ，以  $C_1$  为球心， $\frac{\sqrt{39}}{3}$  为半径的球面与侧面  $ABB_1A_1$  的交线长为（ ）

- A.  $\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$       B.  $\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}$       C.  $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$       D.  $\frac{8\sqrt{3}\pi}{9}$

7. 函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ，( $A > 0$ ， $\omega > 0$ ， $0 < \varphi < \pi$ ) 的部分图象如图中实线所示，图中圆  $C$  与

$f(x)$  的图象交于  $M, N$  两点, 且  $M$  在  $y$  轴上, 则下列说法正确的是 ( )



A. 函数  $f(x)$  的最小正周期是  $\frac{10}{9}\pi$

B. 函数  $f(x)$  在  $(-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{3})$  上单调递减

C. 函数  $f(x)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位后关于直线  $x = \frac{\pi}{4}$  对称

D. 若圆  $C$  的半径为  $\frac{5\pi}{12}$ , 则函数  $f(x)$  的解析式为  $f(x) = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \sin(2x + \frac{\pi}{3})$

8. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足,  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ , 且当  $x > 0$  时,  $f(x) > 0$ ,  $f(1) = 1$ ,

则关于  $x$  的不等式  $2^{1+f(x)} + 2^{1-f(x)} + 2f(x^2) \leq 7$  的解集为 ( )

A.  $[1, +\infty)$

B.  $[-1, 1]$

C.  $[-2, 2]$

D.  $[2, +\infty)$

二、选择题: 本大题共 4 小题、每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项是符合题目要求的. 全部选对的得 5 分、有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 已知平面向量  $\vec{a} = (-2, 1)$ ,  $\vec{b} = (4, 2)$ ,  $\vec{c} = (2, t)$ , 则下列说法正确的是 ( )

A. 若  $\vec{b} \perp \vec{c}$ , 则  $t = 4$

B. 若  $\vec{a} \parallel \vec{c}$ , 则  $t = -1$

C. 若  $t = 1$ , 则向量  $\vec{a}$  在  $\vec{c}$  上的投影向量为  $-\frac{3}{5}\vec{c}$

D. 若  $t > -4$ , 则向量  $\vec{b}$  与  $\vec{c}$  的夹角为锐角

10. 已知  $\odot A: x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0$ ,  $\odot B: x^2 + y^2 - 6x + 2y - 40 = 0$ , 则下列说法正确的是 ( )

- A. 两圆位置关系是相交
- B. 两圆的公共弦所在直线方程是  $x+3y+10=0$
- C.  $\odot A$  上到直线  $x+3y-10=0$  的距离为  $\sqrt{10}$  的点有四个
- D. 若  $P(x,y)$  为  $\odot B$  上任意一点, 则  $[(x-5)^2+(y-5)^2]_{\max} = 90+40\sqrt{5}$
11. 一袋中有大小相同的 4 个红球和 2 个白球, 给出下列 4 个结论, 其中正确的有 ( )
- A. 从中任取 3 球, 恰有一个白球的概率是  $\frac{3}{5}$
- B. 从中有放回的取球 6 次, 每次任取一球, 则取到红球次数的方差为  $\frac{4}{3}$
- C. 现从中不放回的取球 2 次, 每次任取 1 球, 则第一次取到红球且第二次也取到红球的概率为  $\frac{3}{5}$
- D. 从中有放回的取球 3 次, 每次任取一球, 则至少有一次取到红球的概率为  $\frac{26}{27}$
12. 下列说法中, 其中正确的是 ( )
- A. 命题: “ $\exists x \geq 0, x^3 - x - 1 \geq 0$ ” 的否定是 “ $\forall x < 0, x^3 - x - 1 < 0$ ”
- B. 化简  $\frac{\cos^2 5^\circ - \sin^2 5^\circ}{\sin 40^\circ \sin 50^\circ}$  的结果为 2
- C.  $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + 2^3 C_n^3 + \dots + 2^n C_n^n = 3^n$
- D. 在三棱锥  $P-ABC$  中,  $PA=AB=PB=AC=2\sqrt{3}$ ,  $CP=2\sqrt{6}$ , 点  $D$  是侧棱  $PB$  的中点, 且  $CD=\sqrt{21}$ , 则三棱锥  $P-ABC$  的外接球  $O$  的体积为  $\frac{28\sqrt{7}\pi}{3}$ .

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填写在答题卡相应位置上.

13. 某个品种的小麦麦穗长度 (单位: cm) 的样本数据如下: 10.2、9.7、10.8、9.1、8.9、8.6、9.8、9.6、9.9、11.2、10.6、11.7, 则这组数据的第 80 百分位数为\_\_\_\_\_.

14. 二项式  $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$  展开式中常数项是\_\_\_\_\_.

15. 已知  $a, b$  为正实数, 直线  $y=2x-a$  与曲线  $y=\ln(2x+b)$  相切, 则  $\frac{4}{a} + \frac{1}{b}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

16. 经过坐标原点  $O$  的直线与椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  相交于  $A, B$  两点, 过  $A$  垂直于  $AB$  的直线与  $C$  交于点  $D$ , 直线  $DB$  与  $y$  轴相交于点  $E$ , 若  $\overline{OB} \cdot \overline{OE} = 2|\overline{OE}|^2$ , 则  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_.

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分) 设 $\triangle ABC$ 的内角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ , 且满足 $a\cos B - b\cos A = \frac{3}{5}c$ .

(1) 求 $\frac{\tan A}{\tan B}$ 的值;

(2) 若点 $D$ 为边 $AB$ 的中点,  $AB=10, CD=5$ , 求 $BC$ 的值.

18. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ , 且 $2S_{n+1} + S_n = 2, a_1 = 1$ .

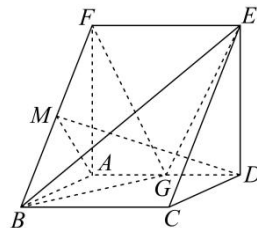
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $b_n = |a_1 a_2 \cdots a_{n+1}|, c_n = \log_2 b_n$ , 数列 $\left\{\frac{1}{c_n}\right\}$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$ , 求 $T_n$ .

19. (12分) 如图所示, 在三棱柱 $ABF - DCE$ 中, 点 $G, M$ 分别是线段 $AD, BF$ 的中点.

(1) 求证:  $AM \parallel$  平面  $BEG$ ;

(2) 若三棱柱 $ABF - DCE$ 的侧面 $ABCD$ 和 $ADEF$ 都是边长为2的正方形, 平面 $ABCD \perp$  平面 $ADEF$ , 求二面角 $E - BG - F$ 的余弦值;



20. (12分) 为了推进产业转型升级, 加强自主创新, 发展高端制造、智能制造, 把我国制造业和实体经济搞上去, 推动我国经济由量大转向质强, 许多企业致力于提升信息化管理水平. 一些中小型工厂的规模不大, 在选择管理软件时都要进行调查统计. 某一小型工厂自己没有管理软件的高级技术员, 欲购买管理软件服务公司的管理软件, 并让其提供服务, 某一管理软件服务公司有如下两种收费方案.

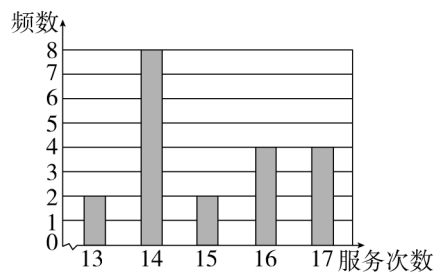
方案一: 管理软件服务公司每月收取工厂 4 800 元, 对于提供的软件服务, 每次另外收费 200 元;

方案二: 管理软件服务公司每月收取工厂 7 600 元, 若每月提供的软件服务不超过 15 次, 不另外收费, 若超过 15 次, 超过部分的软件服务每次另外收费 500 元.

(1) 设管理软件服务公司月收费为  $y$  元, 每月提供的软件服务的次数为  $x$ , 试写出两种方案中  $y$  与  $x$  的函数关系式;

(2) 该工厂对该管理软件服务公司为另一个工厂过去 20 个月提供的软件服务的次数进行了统计, 得到如图

所示的条形统计图. 该工厂要调查服务质量, 现从服务次数为 13 次和 14 次的月份中任选 3 个月, 求这 3 个月恰好是 1 个 13 次服务、2 个 14 次服务的概率;

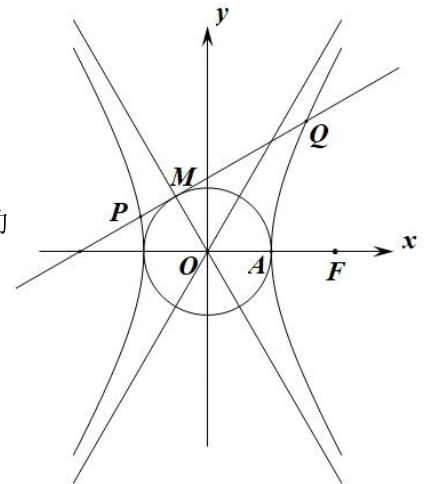


(3) 依据条形统计图中的数据, 把频率视为概率, 从节约成本的角度考虑, 该工厂选择哪种方案较合适? 请说明理由.

21. (12 分) 在平面直角坐标系中,  $O$  为坐标原点, 已知双曲线  $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右焦点  $F$  到双曲线  $E$  的一条渐近线  $y = \sqrt{3}x$  的距离为  $\sqrt{3}$ .

(1) 求双曲线  $E$  的方程;

(2) 如图, 过圆  $O: x^2 + y^2 = 1$  上一点  $M$  作圆  $O$  的切线  $l$  与双曲线  $E$  的左右两支分别交于  $P, Q$  两点, 以  $PQ$  为直径的圆经过双曲线  $E$  的右顶点  $A$ , 求直线  $l$  的方程.



22. (12 分) 已知函数  $f(x) = x^2 - mx + 2 \ln x (m \in R)$ .

(1) 若  $f(x)$  在其定义域内单调递增, 求实数  $m$  的取值范围;

(2) 若  $4 < m < 5$ , 且  $f(x)$  有两个极值点  $x_1, x_2$ , 其中  $x_1 < x_2$ , 求  $f(x_1) - f(x_2)$  的取值范围.