

绝密★启用前

2022-2023 高三上学期期末考试

数学学科

命题人：王战普

满分 150 分，考试时间 120 分钟

考生注意：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 个小题，每题 5 分，共 40 分。在每个小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $M = \{x | y = \ln \frac{(x-1)(x-4)}{\log_3(x-1)}\}$ ， $C_R N = \{y | y^2 > 4\}$ ，则 ()

A. $2 \in M \cap N$

B. $M \cup N = \{a | a \in [-2, 2] \cup (4, +\infty)\}$

C. $N = \{a | a \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)\}$

D. $(C_R M) \cap N = \{a | a \in [-2, 1]\}$

2. 若 $z - i = 1 - |z - 1|i$ ，则 $|z - z| =$ ()

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. $\frac{1}{2}$

3. 在 $\triangle ABC$ 中，O 为重心，D 为 BC 边上近 C 点四等分点， $\overrightarrow{DO} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ ，则 $m+n =$ ()

A. $\frac{1}{3}$

B. $-\frac{1}{3}$

C. $\frac{5}{3}$

D. $-\frac{5}{3}$

4. 一个灯罩可看作侧面有布料的圆台，在原形态下测得的布料最短宽度为 13，将其压扁变为圆环，

测得布料最短宽度为 5，则灯罩占空间最小为 () 来源：高三答案公众号

A. 175π

B. $\frac{325}{3}\pi$

C. 100π

D. 不存在

5. 若六位老师前去某三位学生家中辅导，每一位学生至少有一位老师辅导，每一位老师都要前去辅

导且仅能辅导一位同学，由于就近考虑，甲老师不去辅导同学 1，则有 () 种安排方法

A. 335

B. 100

C. 360

D. 340

6. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$, ($\omega > 0$) 将其向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到 $g(x)$ 。若 $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ 上有三个极大值点, 则 $f(x)$ 一定满足的单调递增区间为 ()

- A. $\left[-\frac{4\pi}{57}, \frac{2\pi}{57}\right]$ B. $\left[-\frac{4\pi}{39}, \frac{2\pi}{39}\right]$ C. $\left[\frac{3\pi}{13}, \frac{5\pi}{13}\right]$ D. $\left[\frac{5\pi}{19}, \frac{7\pi}{19}\right]$

7. 已知 $a = \frac{100}{99} e^{0.99}$, $b = \ln\left(\frac{100}{99} e^{e-0.01}\right)$, $\ln a = c - \ln c$ ($c \neq 0.99$), 则 ()

- A. $b > a > 1.01 > c$ B. $b > a > c > 1.01$ C. $a > b > 1.01 > c$ D. $a > b > c > 1.01$

8. 若已知函数 $f(x) = e^{x+a}$, $g(x) = \ln x + ka$, $\exists a \in (0, +\infty)$, 若函数 $F(x) = f(x) - g(x)$ 存在零点

(参考数据 $\ln 2 \approx 0.70$), 则 k 的取值范围充分不必要条件为 ()

- A. $(e^{0.7}, e^{1.3})$ B. $[1, e^{0.7})$ C. $[e^{2.2}, e^{3.1})$ D. $(e^{1.3}, e^{2.2})$

二、多选题: 本题共 4 个小题, 每题 5 分, 共 20 分。在每个小题给出的四个选项中, 有多项是符合题目要求的。全部选对 5 分, 部分选对得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$, E、F、G 分别为棱 BB_1 、 AB 、 BC 中点, H 为 CC_1 近 C 三等分点, P 在面 AA_1D_1D 上运动, 则 ()

- A. $BC_1 \parallel$ 面 D_1FG B. 若 $\overrightarrow{GP} = \mu \overrightarrow{GF} + \varphi \overrightarrow{GH}$ ($\mu, \varphi \in \mathbb{R}$), 则 C 点到面 PBH 的距离与 P 点位置有关
C. $BD_1 \perp EG$ D. 若 $\overrightarrow{GP} = \mu \overrightarrow{GF} + \varphi \overrightarrow{GH}$ ($\mu, \varphi \in \mathbb{R}$), 则 P 点轨迹长度为 $\frac{2\sqrt{13}}{3}$

10. 若数列 $\{a_n\}$ 有 $a_n^2 + 4a_n = a_{n+1} - 2$, $\{S_n\}$ 为 $\{a_n + 2\}$ 前 n 项积, $\{b_n\}$ 有 $b_n - b_{n-1} = 2b_nb_{n+1}$, 则 ()

- A. $\{\log_b |\log_a(a_n + 2)|\}$ 为等差数列 ($a, b > 0$) B. 可能有 $S_n = (-1)^n(a_1 + 2)^{2^n - 1}$
C. $\{\frac{1}{b_n}\}$ 为等差数列 D. $\{b_n\}$ 第 n 项可能与 n 无关

11. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py$, 过点 $P(0, p)$ 直线 $l \cap C = \{A, B\}$, AB 中点为 Q_1 , 过 A, B 两点作抛物线的切线 l_1, l_2 , $l_1 \cap l_2 = Q_2$, $l_1 \cap y$ 轴 = N, 抛物线准线与 Q_2P 交于 M。下列说法正确的是 ()

- A. $Q_2Q_1 \perp x$ 轴 B. O 为 PN 中点
C. $AQ_2 \perp BQ_2$ D. M 为 PQ_2 近 Q_2 四等分点

12. 已知奇函数 $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, 且 $f(x) = f(\pi - x)$,

" $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f(x) \cos x + f(x) \sin x > 0$ ", " $\forall x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{f(x)}{\cos x} \rightarrow 2$ ", 下列说法正确的是 ()

- A. $f(x)$ 是最小正周期为 2π 的函数

20. (12分) 在高中的数学课上, 张老师教会了我们用如下方法求解数列的前 n 项和:

形如 $a_n = (2n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 的数列, 我们可以错位相减的方法对其进行求和;

形如 $b_n = \frac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$ 的数列, 我们可以使用裂项相消的方法对其进行求和。

李华同学在思考错位相减和裂项相消后的本质后对其进行如下思考:

错位相减: 设 $a_n = a_1 q^{n-1} (q \neq 1)$, $S_n = a_1 + L + a_n = a_1(1 + L + q^{n-1})$, $qS_n = a_1(q + L + q^n)$

$$(q-1)S_n = a_1(q + L + q^n - 1 - L - q^{n-1}) = a_1[(q + L + q^n) - (1 + L + q^{n-1})] = a_1(q^n - 1)$$

$$S_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} a_1$$

综上: 当中间项可以相消时, 可将求解 S_n 的问题用错位相减化简

裂项相消: 设 $b_n = k_n - k_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow k_n - \frac{1}{n} = k_{n+1} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow k_n = \frac{1}{n}$ 或 $\left\{k_n - \frac{1}{n}\right\}$ 为公比为 1 的等比数列;

① 当 $k_n = \frac{1}{n}$ 时, $b_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ 来源: 高三答案公众号

② 当 $\left\{k_n - \frac{1}{n}\right\}$ 为公比为 1 的等比数列时, $k_n = (k_1 + 1) + \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$;

故可为简便计算省去②的讨论, $S_n = k_1 - k_{n+1} = \frac{n}{n+1}$

综上: 可将求解 S_n 的问题用裂项相消转化为求解 k_n 的问题

你看了他的思考后虽觉得这是“废话文学”, 但是你立刻脑子里灵光一闪, 回到座位上开始写下了这三个问题:

(1) 用错位相减的方法“温故”张老师在课堂上举的例子, 求解数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $\{S_n\}$;

(2) 用裂项相消的方法“知新”张老师在课堂上举的例子, 求解数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $\{S_n\}$;

(3) 融会贯通, 求证: $c_n = (n^2 + 2n + 3)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 前 n 项和 $\{T_n\}$ 满足 $S_n + T_n < 18$ 。

请基于李华同学的思考做出解答, 并写出裂项具体过程

B. $\frac{f(x)}{\cos x}$ 是最小正周期为 2π 的函数

C. $\frac{f(x)}{\cos x}$ 关于 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 中心对称

D. 直线 $y = kx$ 与 $\frac{f(x)}{\cos x}$ 若有 3 个交点, 则 $k \in (-\frac{4}{3\pi}, -\frac{4}{5\pi}] \cup [\frac{4}{5\pi}, \frac{4}{3\pi})$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分

13. $(x^2 - \frac{1}{x} + 2)^6$ 中常数项是_____ (写出数字)

14. 若 $\odot C: (x-a)^2 + (y-b)^2 = 16$, $\odot D: (x-6)^2 + (y-8)^2 = 4$, M, N 分别为 $\odot C$, $\odot D$ 上一动点, $|MN|$ 最小值为 4, 则 $3a + 4b$ 取值范围为_____

15. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, F_1, F_2 分别为双曲线左右焦点, 过 F_2 作斜率为 $-\frac{a}{b}$ 的直线交 $y = \frac{b}{a}x$ 于点 A, 连接 AF_1 交双曲线于点 B, 若 $AB = AF_2 = BF_1$, 则双曲线的离心率_____

16. 已知函数 $f(x) = \ln x + kx - \cos x$, $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$, 使得 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 3$, k 取值范围为_____

四、解答题: 本题共六个小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 已知 O 为 $\triangle ABC$ 外心, S 为 $\triangle ABC$ 面积, r 为 $\odot O$ 半径,

$$\text{且满足 } \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AO} + 4r^2(2 - \cos^2 A - \cos^2 B) - \frac{3}{2}a^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}S$$

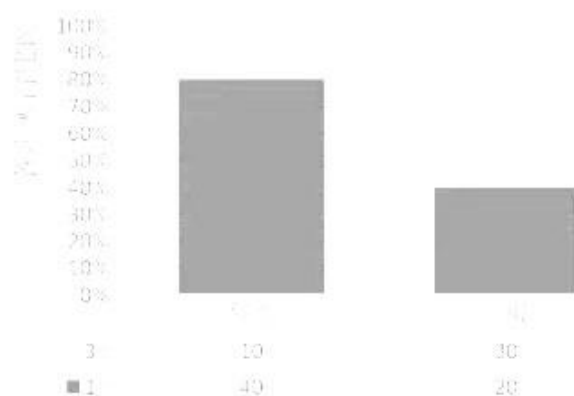
(1) 求 $\angle A$ 大小;

(2) 若 D 为 BC 上近 C 三等分点 (即 $CD = \frac{1}{3}BC$), 且 $AD = \sqrt{2}$, 求 S 最大值

18. (12 分) 张老师在 2022 年市统测后统计了 1 班和 3 班的数学成绩如下图所示



数学成绩各班分布情况



$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(b + d)(c + d)(a + c)}$$

$$n = a + b + c + d$$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

- (1) 根据卡方独立进行检验，说明是否有 99.9% 的把握数学成绩与班级有关；
- (2) 现在根据分层抽样原理，从 1 班和 3 班中抽取 10 人，再让数学评价优秀的同学辅导一位同学数学评价一般的同学。每个人必须有一人辅导。求在抽到甲辅导乙的情况下丙辅导丁的概率。
- (3) 以频率估计概率，若从全年级中随机抽取 3 人，求至少抽到一人数学成绩为优秀的概率。
- (4) 以频率估计概率，若从三班中随机抽取 8 人，求抽到 x 人数学成绩为优秀的分布列（列出通式即可）及期望 $E(x)$ ，并说明 x 取何值时概率最大。来源：高三答案公众号

19. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ ，A、B、C、D 四点共球， R (已知) 为球半径， O 为球心，

O' 为 $\triangle ABC$ 外接圆圆心， r (未知) 为 $\odot O'$ 半径。

- (1) 求 $(V_{A-BCD})_{\max}$ 和此时 O 到面 ABC 距离 h ；
- (2) 在 $(V_{A-BCD})_{\max}$ 的条件下，面 OAB (可以无限延伸) 上是否存在一点 K ，使得 $KC \perp$ 面 OAB ？若存在，求出 K 点距 OO' 距离 d_1 和 K 到面 ABC 距离 d_2 ，若不存在请给出理由。

21. (12 分) 在平面直角坐标系中, F_1, F_2 分别为 $(-1, 0), (1, 0)$, $\odot F_2: (x-1)^2 + y^2 = 16$, E 为 $\odot F_2$ 上一点, C 为线段 EF_2 上一点, $\odot C$ 过 F_1 和 E

(1) 求 C 点轨迹方程, 并判断轨迹形状;

(2) 过 F_1, F_2 两直线 l_1, l_2 交 $\odot C$ 分别于 A, B 和 M, N , P, Q 分别为 AB 和 MN 中点。求 P, Q 轨迹方程, 并判断轨迹形状;

(3) 在 (2) 的条件下, 若 $PQ \parallel x$ 轴, $l_1 \cap l_2 = D$, 求 D 点轨迹方程, 并判断轨迹形状。

22. (12 分) 已知函数 $f(x) = xe^{kx-1} - kx + \ln \frac{1}{x}$

(1) 求证: $f(x) \geq 0$;

(2) 若 $\forall x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x) \geq \frac{1}{e^2} + 1$, 求 k 满足的取值范围。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线