

## 2019 年高中数学联赛模拟试题（一）

### 一、填空题（每小题 7 分，共 56 分）

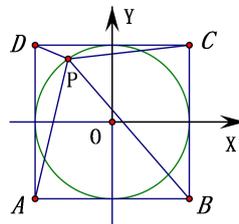
1、若  $y = \log_{2016}(x^2 - ax + 65)$  的值域为  $R^+$ ，那么  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

2、四面体  $ABCD$  中， $\triangle ABC$  是一个正三角形， $AD = BD = 2$ ， $AD \perp BD$ ， $AD \perp CD$ ，则  $D$  到面  $ABC$  的距离为\_\_\_\_\_.

3、若对于所有的正数  $x, y$ ，均有  $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq a\sqrt{x+y}$ ，则实数  $a$  的最小值是\_\_\_\_\_.

4、已知  $P$  是正方形  $ABCD$  内切圆上的一点，记  $\angle APC = \alpha$ ， $\angle BPD = \beta$ ，则

$\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta =$ \_\_\_\_\_.



5、等差数列  $2, 5, 8, \dots, 2015$  与  $4, 9, 14, \dots, 2014$  的公共项（具有相同数值的项）的个数是\_\_\_\_\_.

6、设  $x$  为锐角，则函数  $y = \sin x \sin 2x$  的最大值是\_\_\_\_\_.

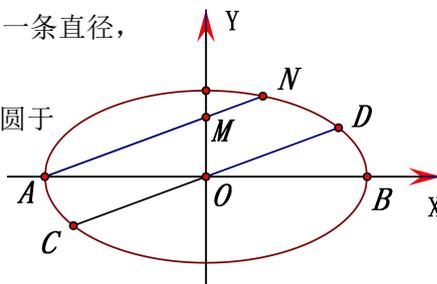
7、若将前九个正整数  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$  分别填写于一张  $3 \times 3$  方格表的九个格子中，使得每行三数的和，每列三数的和皆为质数，你的填法是

### 二、解答题（共 64 分）

8、（14 分）如图， $CD$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的一条直径，

过椭圆长轴的左顶点  $A$  作  $CD$  的平行线，交椭圆于另一点  $N$ ，交椭圆短轴所在直线于  $M$ ，

证明： $AM \cdot AN = CO \cdot CD$  .



9、（15 分）设  $x, y, z$  为正数，满足： $xy + yz + zx = 1$ ，证明：

$$xyz(x+y)(y+z)(x+z) \geq (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)$$

10、(20分)设集合  $A = \{1, 2, \dots, 2016\}$ ，对于  $A$  的任一个1008元子集  $X$ ，若存在  $x, y \in X$ ，满足  $x < y, x|y$ ，则称  $X$  为“好集”，求最大的正整数  $a$ ，( $a \in A$ )，使得任一个含  $a$  的1008元子集皆为“好集”。

(本试题来源于百度文库)

自主招生在线创始于2014年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主招生在线官方微信号：[zizzsw](https://www.zizzs.com)。



微信扫一扫，快速关注