2021年湖北省高考冲刺压轴卷数学试题参考答案及评分细则

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	D	B	B	C	A	D	C	CD	ABD	AC	ACD

13. 2;　　14. 3^{n-1};　　15. $\dfrac{256\pi}{3}$;　　16. $3\sqrt{3}$

17.解：

（1）若选①，则由已知得$(S_{n+1}-S_n)-(S_n-S_{n-1})=3(n\geq 2,n\in N^*)$

即$a_{n+1}-a_n=3(n\geqslant 2,n\in N^*)$，∴数列$\{a_n\}$是等差数列

又$a_2-a_1=3$，∴$a_n=2+3(n-1)=3n-1$

若选②，则由$S_{n+1}=3S_n-2S_{n-1}-a_{n-1}(n\geqslant 2,n\in N^*)$

得$S_{n+1}-S_n=2(S_n-S_{n-1})-a_{n-1}$，即$a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}$，∴数列$\{a_n\}$是等差数列

又公差$d=a_2-a_1=3$

∴$a_n=2+3(n-1)=3n-1$

若选③，由$\dfrac{S_n}{n}-\dfrac{S_{n-1}}{n-1}=\dfrac{3}{2}(n\geqslant 2)$得，数列$\{\dfrac{S_n}{n}\}$是等差数列

又$\dfrac{S_1}{1}=a_1=2$，∴$\dfrac{S_n}{n}=2+\dfrac{3}{2}(n-1)=\dfrac{3}{2}n+\dfrac{1}{2}$，∴$S_n=\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{1}{2}n$

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=3n-1$

当$n=1$时，$a_1=2$也适合$a_n=3n-1$

综上$a_n=3n-1$　　　　……（5分）

（2）∵b_n是a_n，a_{n+1}的等比中项

∴$b_n^{\ 2}=a_na_{n+1}=(3n-1)(3n+2)$，∴$\dfrac{1}{b_n^{\ 2}}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n+2}\right)$

∴$T_n=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5})+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{8}\right)+\ldots+\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n+2})$

$\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3n+2})=\dfrac{n}{2(3n+2)}$　　　　……（10分）

18.解：

（1）由题意得，$a\sin A+\frac{2}{3}c\sin B=b\sin B+c\sin C$

$\therefore a^2+\frac{2}{3}bc=b^2+c^2$，$\therefore \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{3}$

$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore \sin A=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ……（6 分）

(2)由（1）得 $a^2=b^2+c^2-\frac{2}{3}bc\geqslant 2bc-\frac{2}{3}bc=\frac{4}{3}bc$

$\because a=2\ \therefore bc\leqslant 3$

$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\frac{1}{2}\times 3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$ 当且仅当 $b=c=\sqrt{3}$ 时等号成立.

……（12 分）

19.解：

（1）$\because PD\perp$面$ABCD, BC\subset$面$ABCD$，$\therefore PD\perp BC$.

又$\because ABCD$ 是正方形，$\therefore BC\perp CD$

又$\because PD\cap CD=D$，$\therefore BC\perp$面 PCD，$DE\subset$面PCD $\therefore BC\perp DE$

又$\because PD=CD, PD\perp CD$，$\therefore\triangle PDC$ 是等腰直角三角形

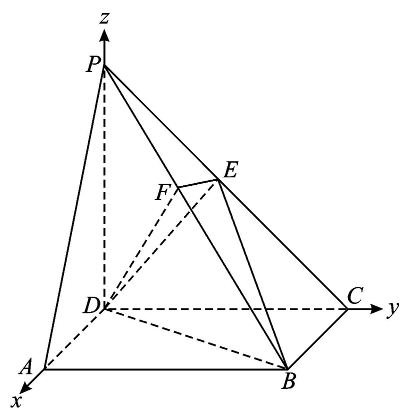
又$\because E$ 是斜边 PC 的中点，$\therefore DE\perp PC$，$PC\cap CB=C$. $\therefore DE\perp$面 PBC

$BF\subset$面PBC $\therefore DE\perp BF$

又$\because EF\perp BF$，$EF\cap DE=E$，$\therefore BF\perp$面 EFD

又$\because BF\subset$面BDF，面$BDF\perp$面EFD

……（6 分）



（2）以 O 为原点，DA, DC, DP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，设 $DC=1$，则

$P(0,0,1),\ C(0,1,0),\ B(1,1,0),\ E(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

设面EBD的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$,则

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=0\\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}\Rightarrow \text{令}y=-1\text{则}x=1,z=1\therefore\vec{n}=(1,-1,1)$$

取平面CDB**的法向量**$\vec{m}=(0,0,1)$

$$\therefore\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle=\frac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

即二面角 E-BD-C 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

……（12 分）

20. 解：（1）根据频率分布直方图，200 只小白鼠该项医学指标的平均值为：

$$\bar{x}=(12\times0.02+14\times0.06+16\times0.14+18\times0.18+20\times0.05+12\times0.02+22\times0.03+24\times0.02)\times2=17.4$$

……（4 分）

（2）(i) $\mu-\sigma=17.4-2.63=14.77$，$P(X\geq\mu-\sigma)=0.6827+\dfrac{1-0.6827}{2}=0.8414$

记事件 A 表示首先注射疫苗后产生抗体，事件 $\overline{A}$ 表示首先注射疫苗后没有产生抗体，则

$P(A)=0.8414, P(\overline{A})=0.1586$ 。所以 200 只小白鼠首先注射疫苗后有：

$200\times0.8414\approx168$（只）产生抗体；有 200-168=32 只没有产生抗体。

故一只小白鼠注射 2 次疫苗后产生抗体的概率 $P=\dfrac{168+16}{200}=0.92$

……（8 分）

(ii) 设产生抗体的人数为 ζ 人，由于 $\zeta\sim B(1000,0.92)$

所以期望 $E(\zeta)=1000\times0.92=920$(人) ……（12 分）

21.解：（1）设焦距为 $2c$, 且 $c^2=a^2-b^2$, 则

$$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\4a=8\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow a=2\sqrt{2}, c=2, b^2=a^2-c^2=4, \therefore \text{椭圆}E\text{为}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$$ ……（4 分）

（2）设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$, 直线 AB 为 $y=k(x+2)$, 则

$$\begin{cases}y=k(x+2)\\\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}\Rightarrow(1+2k^2)x^2+8k^2x+(8k^2-8)=0$$

$$\therefore x_1+x_2=\frac{-8k^2}{1+2k^2},\quad x_1\cdot x_2=\frac{8k^2-8}{1+2k^2}$$

$$\therefore AB\text{中点}M\left(\frac{-4k^2}{1+2k^2},\frac{2k}{1+2k^2}\right),\quad\therefore\text{直线}OM\text{的斜率为}-\frac{1}{2k}.$$

又直线 AF_2 为 $y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x-2)$, BF_2 为 $y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$, 则

$$C\left(4,\frac{2y_1}{x_1-2}\right), D\left(4,\frac{2y_2}{x_2-2}\right)$$

$$\frac{2y_1}{x_1-2}+\frac{2y_2}{x_2-2}=\frac{2y_1(x_2-2)+2y_2(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}$$

$$=\frac{2k(x_1+2)(x_2-2)+2k(x_2+2)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{4kx_1x_2-16k}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}=\frac{-12k}{8k^2-1}$$

$\therefore CD$中点$N(4,\dfrac{-6k}{8k^2-1})$

直线 DN 斜率为 $\dfrac{-3k}{2(8k^2-1)}$

若M,O,N三点共线则$-\dfrac{1}{2k}=\dfrac{-3k}{2(8k^2-1)}$　　$\therefore k^2=\dfrac{1}{5},k=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore$存在$k=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$满足题意. ……（12 分）

22.解：

（1）由题意得，$f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$

当 $a=\dfrac{1}{4}$ 时，$f'(x)=\dfrac{x^2-x}{2(1+x)}$，令 $f'(x)=0$，则 $x=0$ 或 1，则

$x\in(-1,0)$ 和 $(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；$x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$. ……（4 分）

（2）$f'(x)=\dfrac{2ax^2+(2a-1)x}{x+1}$，得

（i）当 $a<0$ 时，$x\in[0,+\infty)$，$f'(x)<0$，$f(x)\le f(0)=0$，矛盾。

（ii）当 $a=0$ 时，$f'(x)=\dfrac{-x}{x+1}$，令 $f'(x)=0$，则 $x=0$

$x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)>0$；$x\in[0,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)<f(0)=0$，矛盾。

（iii）当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，令 $f'(x)=0$，则 $x=0$ 或 $\dfrac{1}{2a}-1$

$x\in(0,\dfrac{1}{2a}-1)$时，$f'(x)<0$

所以 $x\in(0,\dfrac{1}{2a}-1)$ 时，$f(x)<f(0)=0$，矛盾。

（iv）当 $a\ge\dfrac{1}{2}$ 时，令 $f'(x)=0$，则 $x=0$ 或 $\dfrac{1}{2a}-1$

$x\in[0,+\infty)$时，$f'(x)>0$

所以 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)\ge f(0)=0$，满足题意.

综上，$a\ge\dfrac{1}{2}$ ……（12 分）