绝密★启用前

海南省 2022—2023 学年高一年级学业水平诊断(二)

数 学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 $z=\dfrac{5i}{1+2i}$,则 $\bar{z}=$

A. $1+2i$　　B. $1-2i$　　C. $2+i$　　D. $2-i$

2. 每年 4 月 15 日为全民国家安全教育日,某学校党委组织党员学习《中华人民共和国国家安全法》,为了解党员学习的情况,随机抽取了部分党员,对他们一周的学习时间(单位:时)进行调查,统计数据如下表所示:

学习时间(时)	[0,2)	[2,4)	[4,6)	[6,8)	[8,10]
党员人数	8	13	9	10	10

则从该校随机抽取 1 名党员,估计其学习时间不少于 6 小时的概率为

A. 0.2　　B. 0.4　　C. 0.6　　D. 0.8

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-2)$,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=$

A. 3　　B. 5　　C. $5\sqrt{2}$　　D. 25

4. 已知在四边形 $ABCD$ 中,$AB/\!/CD$,$AB\perp AD$,且 $AB=2CD=2$,$AD=\sqrt{3}$,则将四边形 $ABCD$ 绕直线 AD 旋转一周后所形成的几何体的侧面积为

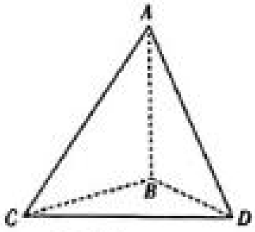
A. $\sqrt{6}\pi$　　B. 3π　　C. 6π　　D. $4\sqrt{3}\pi$

5. 已知 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$,$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$,$\sin\beta=\dfrac{12}{13}$,则 $\cos(\alpha+\beta)=$

A. $-\dfrac{63}{65}$　　B. $-\dfrac{33}{65}$　　C. $\dfrac{33}{65}$　　D. $\dfrac{63}{65}$

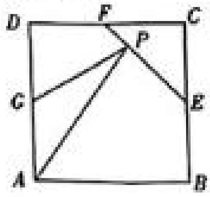
6. 新海航大厦是中国唯一五星航空——海南航空集团总部办公楼,外形像张满的风帆,是海口市一个崭新的地标式建筑.某同学为测楼高 AB,选取了与楼基 B 在同一水平面内的两个

测量基点 C 与 D，测得 $\angle BCD=15^\circ$，$\angle BDC=30^\circ$，$\angle ACB=45^\circ$，再通过计算得楼高 AB 为 138 m，则两个测量基点之间的距离 CD 约为



A. 159 m　　B. 195 m　　C. 207 m　　D. 239 m

7. 如图所示，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，点 E,F,G 分别是边 BC,CD,AD 的中点，点 P 是线段 EF 上的动点，则$\overrightarrow{GP}\cdot\overrightarrow{AP}$的最小值为



A. $\frac{23}{8}$　　B. 3

C. $\frac{27}{8}$　　D. 4

8. 甲、乙两人每次射击命中目标的概率分别为$\frac{2}{3}$与$\frac{1}{2}$，且每次射击命中与否互不影响，现两人玩射击游戏，规则如下：每次由 1 人进行射击，若射击一次不中，则原射击人继续射击，若射击一次命中，则换对方接替射击，且第一次由甲射击. 则前 4 次中甲恰好射击 3 次的概率为

A. $\frac{2}{9}$　　B. $\frac{7}{27}$　　C. $\frac{8}{27}$　　D. $\frac{1}{3}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知一组数据为:3,4,6,7,7,5,5,4,5,4，则这组数据的

A. 平均数为 5　　B. 众数为 5　　C. 中位数为 5.5　　D. 方差为$\frac{8}{5}$

10. 下列说法正确的是

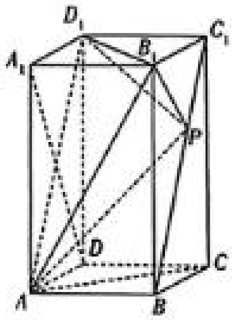
A. 对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，都有 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$

B. 对任意非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，都有 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

C. 若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$

D. 若非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$

11. 如图所示，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为线段 BC_1 上的动点（不与点 B 重合），若 $AB=BC=1$，$CC_1=2$，则



A. $AP\perp A_1D$

B. 三棱锥 $P-AD_1B_1$ 的体积为定值

C. 异面直线 BP 与 AC 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$

D. 二面角 $P-AB-C$ 的正切值为 2

12. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，则下列说法正确的是

A. 若$A=\frac{2\pi}{3}$，$a=3$，AB边上的高为$\frac{3}{2}$，则$\triangle ABC$为等腰三角形

B. 若$a=\sqrt{3}$，$b=1$，$B=\frac{\pi}{6}$，则$\triangle ABC$为直角三角形

C. 若$A=2C$，$\sin B=2\sin C$，则$\triangle ABC$为直角三角形

D. 若$\tan A+\tan B+\tan C>0$，则$\triangle ABC$为锐角三角形

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

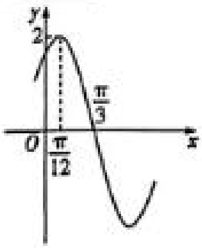
13. 已知复数$z=(a-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})(a\in\mathbf{R})$是纯虚数，则$a=$__________.

14. 某学校有绘画、围棋、篮球三个兴趣小组，三个年级参加兴趣小组的学生人数如下表(每名同学只参加一个兴趣小组)：

	绘画组	围棋组	篮球组
高一	50	m	40
高二	30	40	20
高三	20	10	10

学校要对这三个兴趣小组的活动效果进行抽样调查，按各组人数的比例用分层随机抽样的方法，从这些学生中抽取30人，若围棋组被抽出10人，则m的值为__________.

15. 已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$的部分图象如图所示，则$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=$________.



16. 已知正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的高是底面边长的2倍，其外接球半径为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，点P与Q分别是侧棱BB_1，CC_1上的动点，则$AP+PQ+QA_1$的最大值为__________.

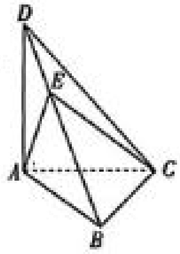
四、解答题：共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (10分)

如图所示，在四面体$ABCD$中，$\triangle ABC$与$\triangle ACD$均为等腰直角三角形，$AD=AC=BC=1$，$BD=\sqrt{3}$.

(Ⅰ)证明：$AD\perp$平面ABC；

(Ⅱ)若点E在棱BD上，且$AE\perp BD$，求四面体$ACDE$与四面体$ABCE$的体积之比.



18.（12 分）

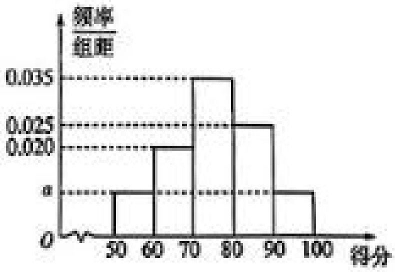
已知函数$f(x)=\sin^2x-\cos^2x$.

（Ⅰ）若$f(\alpha)=\frac{1}{4}$，且$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，求$f\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$的值；

（Ⅱ）求函数$g(x)=\frac{f(x)}{2}-f\left(\frac{x}{2}\right)$的最大值.

19.（12 分）

第31届世界大学生夏季运动会（简称大运会）将于2023年7月28日在四川成都开幕，这是中国西部城市第一次举办世界性综合运动会. 为普及大运会相关知识，营造良好的赛事氛围，某学校举行“大运会百科知识”答题活动，并随机抽取了20名学生，他们的答题得分（满分100分）的频率分布直方图如图所示.

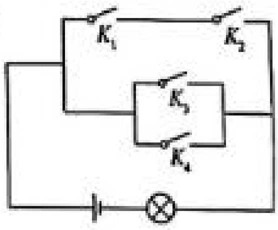


（Ⅰ）求频率分布直方图中a的值及这20名学生得分的80%分位数；

（Ⅱ）若从样本中任选2名得分在[50,70)内的学生，求这2人中恰有1人的得分在[60,70)内的概率.

20.（12 分）

在如图所示的电路中，K_1,K_2,K_3,K_4四个开关闭合的概率分别为$\frac{3}{4},\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{2}$，且各个开关是否闭合是相互独立的.



（Ⅰ）求四个开关均断开的概率；

（Ⅱ）求电路为通路的概率.

21.（12 分）

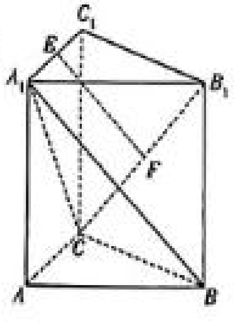
已知$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，$c=a\cos B+\frac{\sqrt{3}}{3}b\sin A$.

（Ⅰ）求A；

（Ⅱ）若$a=\sqrt{3}$，求BC边上的中线AM的最大值.

22.（12 分）

如图，在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=1$，$AA_1=\sqrt{2}$，E,F分别为A_1C_1，B_1C的中点.



（Ⅰ）求证：EF//平面A_1BC；

（Ⅱ）求点A到平面A_1BC的距离；

（Ⅲ）求EF与平面ACC_1A_1所成的角的大小.

海南省 2022—2023 学年高一年级学业水平诊断(二)

数学 · 答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案　D

命题意图　本题考查复数的有关概念和运算.

解析　$z=\frac{5i}{1+2i}=\frac{5i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=i(1-2i)=2+i$, $\therefore \bar{z}=2-i$.

2. 答案　B

命题意图　本题考查利用频率估计概率.

解析　样本中学习时间不少于 6 小时的频率为$\frac{10+10}{8+13+9+10+10}=0.4$,故所求的概率的估计值为 0.4.

3. 答案　B

命题意图　本题考查由向量垂直求参数,向量模的计算.

解析　$\because \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, $\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x-2=0$,解得 $x=2$, $\therefore \boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(2,1)-2(1,-2)=(0,5)$, $\therefore |\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=5$.

4. 答案　C

命题意图　本题考查圆台的结构特征及相关计算.

解析　由题可知四边形 $ABCD$ 是直角梯形,且 $BC=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(2-1)^2}=2$. 梯形 $ABCD$ 绕直线 AD 旋转一周后形成的几何体为圆台,圆台的上、下底面的半径分别为 1 与 2,母线 $l=BC=2$, $S_{圆台侧}=\pi(r_1+r_2)l=6\pi$.

5. 答案　A

命题意图　本题考查利用三角恒等变换求三角函数值.

解析　$0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$, $\therefore \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=-\frac{5}{13}$, $\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{5}{13}\right)-\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}=-\frac{63}{65}$.

6. 答案　B

命题意图　本题考查应用正弦定理解决测量高度问题.

解析　在$\triangle BCD$ 中,由正弦定理知$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}\Rightarrow CD=\frac{BC\cdot\sin\angle CBD}{\sin\angle BDC}$. 在 Rt$\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=45^\circ$, $\therefore BC=AB$, $\therefore CD=\frac{AB\cdot\sin\angle CBD}{\sin\angle BDC}=\frac{138\times\sin 135^\circ}{\sin 30^\circ}=138\sqrt{2}\approx 195(\mathrm{m})$.

7. 答案　A

命题意图　本题考查平面向量在几何中的应用.

解析　以 A 为坐标原点, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$的方向为 x, y 轴正方向建立直角坐标系,则 $A(0,0)$, $G(0,1)$, $E(2,1)$, $F(1,2)$,设 $P(x,y)$, $\overrightarrow{FP}=\lambda\overrightarrow{FE}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,则$(x-1,y-2)=\lambda(1,-1)$,所以 $x-1=-(y-2)$,得 $y=3-x$. $\overrightarrow{GP}\cdot\overrightarrow{AP}=(x,y-1)\cdot(x,y)=x^2+y^2-y=x^2+(3-x)^2-(3-x)=2x^2-5x+6=2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{23}{8}$,又 $x=1+\lambda\in[1,2]$,

所以当 $x=\frac{5}{4}$ 时, $\overrightarrow{GP}\cdot\overrightarrow{AP}$ 取得最小值 $\frac{23}{8}$.

8. **答案** C

命题意图 本题考查互斥事件的概率加法公式和独立事件乘法公式的运用.

解析 分3种情况:①前4次的射击顺序为"甲甲甲乙",则前2次甲射击不中,第3次甲射击命中,概率为 $P_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$;②前4次的射击顺序为"甲甲乙甲",则第1次甲射击不中,第2次甲射击命中,第3次乙射击命中,概率为 $P_2=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{9}$;③前4次的射击顺序为"甲乙甲甲",则第1次甲射击命中,第2次乙射击命中,第3次甲射击不中,概率为 $P_3=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$. 所以前4次中甲恰好射击3次的概率为 $P=P_1+P_2+P_3=\frac{8}{27}$.

二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分. 每小题全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. **答案** AD

命题意图 本题考查样本数据的数字特征的计算.

解析 对于A,因为 $\bar{x}=\frac{6+3+4\times3+5\times3+7\times2}{10}=5$,故A正确;

对于B,众数为4和5,故B错误;

对于C,将这组数据按由小到大的顺序排列为3,4,4,4,5,5,5,6,7,7,中位数为5,故C错误;

对于D, $s^2=\frac{1}{10}[(3-5)^2+3\times(4-5)^2+3\times0+(6-5)^2+2\times(7-5)^2]=\frac{1}{10}(4+3+1+8)=\frac{8}{5}$,故D正确.

10. **答案** AC

命题意图 本题考查平面向量的运算性质.

解析 对于A,设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,由向量数量积的定义, $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos\theta|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$,故A正确;

对于B,若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是方向相同的非零向量,可知 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$,故B错误;

对于C,因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=0$,所以 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,故C正确;

对于D,若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量,根据向量减法运算的三角形法则,显然 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\neq||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$,故D错误.

11. **答案** BCD

命题意图 本题考查立体几何中的线线垂直、体积计算、异面直线所成角、二面角的计算.

解析 对于A,假设 $AP\perp A_1D$,因为 $AB\perp$ 平面 ADD_1A_1,即 $AB\perp A_1D$,从而 $A_1D\perp$ 平面 ABP,所以 $A_1D\perp AD_1$,与已知矛盾,故A错误;

对于B,易知四边形 ABC_1D_1 为矩形, $\therefore S_{\triangle AD_1P}=\frac{1}{2}AB\times AD_1$ 为定值,又点 B_1 到平面 ABC_1D_1 的距离也为定值,于是 $V_{P-AD_1B_1}=V_{B_1-AD_1P}$ 为定值,故B正确;

对于C,连接 A_1C_1, A_1B,异面直线 BP 与 AC 所成角即为直线 BC_1 与 AC 所成角,亦即 BC_1 与 A_1C_1 所成角,在 $\triangle A_1BC_1$ 中, $A_1C_1=\sqrt{2}$, $A_1B=\sqrt{5}$, $BC_1=\sqrt{5}$,易知 $\cos\angle A_1C_1B=\frac{\sqrt{10}}{10}$,故C正确;

对于D,二面角 $P-AB-C$ 即为二面角 C_1-AB-C,易得 $AB\perp$ 平面 C_1CBB_1,所以二面角 $P-AB-C$ 的平面角为 $\angle C_1BC$,在 $\mathrm{Rt}\triangle C_1BC$ 中, $\tan\angle C_1BC=2$,故D正确.

12. **答案** ACD

命题意图 本题综合考查正、余弦定理，及三角恒等变换.

解析 对于 A，AB 边上的高为 $a\sin B=\frac{3}{2}$，$\therefore \sin B=\frac{1}{2}$，又 $A=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore B=\frac{\pi}{6}$，可得 $C=\frac{\pi}{6}$，A 正确；

对于 B，由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow \sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $A\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$，B 错误；

对于 C，由 $A=2C$，知 $B=\pi-3C$，由 $\sin B=2\sin C$ 得 $\sin 3C=2\sin C$，$\therefore \sin C\cos 2C+2\cos^2 C\sin C=2\sin C$，又 $\because \sin C\neq 0$，得 $\cos^2 C=\frac{3}{4}$，$\because A=2C$，$\therefore \cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\sin C=\frac{1}{2}$，$\therefore \sin B=2\sin C=1$，$\therefore B=\frac{\pi}{2}$，C 正确；

对于 D，$\because \tan C=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}$，$\therefore \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$，又 $\because \tan A+\tan B+\tan C>0$，$\therefore \tan A\cdot\tan B\cdot\tan C>0$，$\because A+B+C=\pi$，$\therefore \tan A,\tan B,\tan C$ 都为正，故 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，D 正确.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案** -1

命题意图 本题考查复数的基本概念和运算.

解析 $z=(a-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=a+1+(a-1)\mathrm{i}$ 为纯虚数，则 $a=-1$.

14. **答案** 35

命题意图 本题考查分层随机抽样的概念.

解析 由题意可知三个兴趣小组的人数分别为 $100,m+50,70$，围棋组被抽出 10 人，故 $\frac{m+50}{100+(m+50)+70}\times 30=10$，解得 $m=35$.

15. **答案** -1

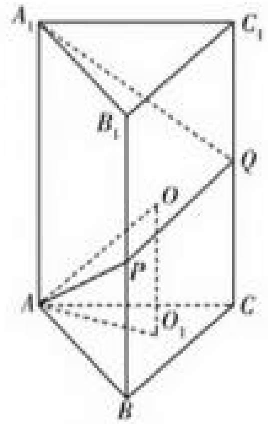
命题意图 本题考查利用三角函数的图象求函数解析式并求函数值.

解析 设函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T，由图看出 $A=2$，$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}=\frac{1}{4}T$，$\therefore T=\pi$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，$\therefore \varphi=2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，取 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，$\therefore f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-1$.

16. **答案** $3\sqrt{5}$

命题意图 本题考查柱体展开图、棱柱外接球问题.

解析 如图所示，O 为三棱柱外接球的球心，O_1 是底面的中心，设球 O 的半径为 R，$AB=x$，则 $OO_1=\frac{1}{2}AA_1=x$，$AO_1=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle AO_1O$ 中，$R^2=AO_1^2+OO_1^2=\frac{x^2}{3}+x^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$，$\therefore x=1$，即三棱柱的高为 2，底面边长为 1. 当 P 与 B_1 重合，Q 与 C 重合时，AP,PQ,QA_1 各自取到最大值 $\sqrt{5}$，所以 $AP+PQ+QA_1$ 的最大值为 $3\sqrt{5}$.



四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查线面垂直的证明以及棱锥的体积计算.

解析 （Ⅰ）由题意知 $AC\perp BC$，$AD\perp AC$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2}$，……（1 分）

在$\triangle ABD$中，$AD=1$，$BD=\sqrt{3}$，$AB=\sqrt{2}$，满足 $AD^2+AB^2=BD^2$，……（2 分）

$\therefore AD\perp AB$，……（3 分）

又 $AD\perp AC$，$AB\cap AC=A$，……（4 分）

$\therefore AD\perp$平面ABC. ……（5 分）

（Ⅱ）在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$\because AE\perp BD$，$\therefore\triangle ADE\backsim\triangle BDA$，……（6 分）

$\therefore \dfrac{DE}{AD}=\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，得 $DE=\dfrac{AD}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ……（7 分）

$\therefore BE=BD-DE=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$\therefore\dfrac{DE}{BE}=\dfrac{1}{2}$，……（8 分）

$\therefore$点 D 到平面 ACE 的距离与点 B 到平面 ACE 的距离之比为$\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$四面体 $ACDE$ 与四面体 $ABCE$ 的体积之比为$\dfrac{1}{2}$. ……（10 分）

18. **命题意图** 本题考查三角恒等变换及三角函数的性质.

解析 （Ⅰ）$f(x)=\sin^2x-\cos^2x=-\cos 2x$. ……（2 分）

$\because f(\alpha)=-\cos 2\alpha=\dfrac{1}{4}$，$\therefore\cos 2\alpha=-\dfrac{1}{4}$，……（3 分）

又 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\therefore 2\alpha\in(0,\pi)$，……（4 分）

$\therefore f\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin 2\alpha=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$. ……（7 分）

（Ⅱ）$g(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\cos x=-\cos^2x+\cos x+\dfrac{1}{2}=-\left(\cos x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$. ……（10 分）

$\because -1\leqslant\cos x\leqslant 1$，$\therefore$当 $\cos x=\dfrac{1}{2}$时，$g(x)$取最大值$\dfrac{3}{4}$. ……（12 分）

19. **命题意图** 本题考查频率分布直方图的基础知识与概率的应用与计算.

解析 （Ⅰ）由直方图知$(2a+0.02+0.025+0.035)\times 10=1$，

$\therefore a=0.01$. ……………………………………………………………………………………… (2 分)

设 80% 分位数为 x，前 3 组的频率之和为 0.65，前 4 组的频率之和为 0.9，

$\therefore x\in[80,90)$. ……………………………………………………………………………………… (4 分)

且 $x=80+\frac{0.8-0.65}{0.9-0.65}\times10=86$，即这 20 名学生得分的 80% 分位数为 86. …………… (6 分)

(Ⅱ)由已知可得：得分在 $[50,60)$ 内的人数为 $0.01\times10\times20=2$，

得分在 $[60,70)$ 内的人数为 $0.02\times10\times20=4$. ……………………………………………… (8 分)

记得分在 $[50,60)$ 内的学生为 a,b，得分在 $[60,70)$ 内的学生为 c,d,e,f.

则所有的样本点为：$(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(b,c),(b,d),(b,e),(b,f),(c,d),(c,e),(c,f),$

$(d,e),(d,f),(e,f)$，共 15 个. ……………………………………………………………………… (9 分)

其中恰有 1 人的得分在 $[60,70)$ 内的样本点为：

$(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(b,c),(b,d),(b,e),(b,f)$，共 8 个. ……………………………………… (10 分)

故所求事件的概率 $P=\frac{8}{15}$. ……………………………………………………………………… (12 分)

20. **命题意图** 本题考查事件的关系，相互独立事件的概率计算.

解析 记 K_1,K_2,K_3,K_4 四个开关闭合分别为事件 A,B,C,D.

(Ⅰ)四个开关均断开的概率为 $P=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})P(\overline{D})=\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{48}$.

…… (4 分)

(Ⅱ)考虑"电路为通路"的对立事件"电路为断路"，分 3 种情况：

①四个开关均断开，$P_1=\frac{1}{48}$；……………………………………………………………………… (5 分)

②K_1 闭合，其余开关均断开，$P_2=\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}$；……………… (7 分)

③K_2 闭合，其余开关均断开，$P_3=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{24}$. ……………… (8 分)

所以电路为通路的概率为 $P=1-(P_1+P_2+P_3)=1-\left(\frac{1}{48}+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}\right)=\frac{7}{8}$. …………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题综合考查正、余弦定理，和基本不等式有关的三角形最值问题.

解析 (Ⅰ)由正弦定理得 $\sin C=\sin A\cos B+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin B\sin A$，① ……………………………… (2 分)

$\because C=\pi-(A+B)$，$\therefore \sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，② …………………………… (4 分)

由①②和 $B\in(0,\pi)$，得 $\frac{\sqrt{3}}{3}\sin A=\cos A$，……………………………………………………… (5 分)

$\therefore \tan A=\sqrt{3}$，又 $A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………… (6 分)

(Ⅱ)在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，$a=\sqrt{3}$，

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle BAC$，得 $b^2+c^2=bc+3$. ……………………………………… (7 分)

由基本不等式得 $b^2+c^2=bc+3\geqslant 2bc$，$\therefore bc\leqslant 3$（当且仅当 $b=c$ 时取等号）. ………………… (8 分)

在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，………………………………………………………… (9 分)

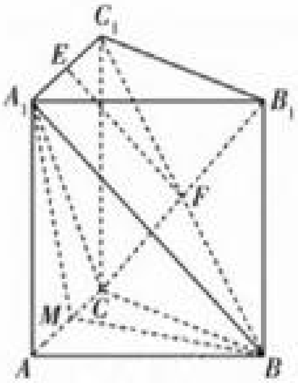
$\therefore \overrightarrow{AM}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})$

$=\frac{1}{4}(c^2+b^2+2bc\cos\angle BAC)=\frac{1}{4}(2bc+3)\leqslant\frac{9}{4}$. ……………………………………（11 分）

$\therefore |\overrightarrow{AM}|\leqslant\frac{3}{2}$，故 AM 的最大值为$\frac{3}{2}$. ……………………………………（12 分）

22. **命题意图**　本题考查线面平行的判定，线面角的计算.

解析　（Ⅰ）如图，连接 BC_1.



$\because$ 侧面 BCC_1B_1 为矩形，F 为 B_1C 的中点，$\therefore BC_1\cap B_1C=F$，$F$ 为 BC_1 的中点.

而 E 为 A_1C_1 的中点，则 $EF/\!/A_1B$. ……………………………………（1 分）

又 $A_1B\subset$ 平面 A_1BC，$EF\not\subset$ 平面 A_1BC，

$\therefore EF/\!/$ 平面 A_1BC. ……………………………………（3 分）

（Ⅱ）设点 A 到平面 A_1BC 的距离为 d，则 $V_{A-A_1BC}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BC}d$. ……………………………………（4 分）

$\because V_{A-A_1BC}=V_{A_1-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{12}$，……………………………………（5 分）

在 $\triangle A_1BC$ 中，可得 $A_1B=A_1C=\sqrt{3}$，$BC=1$，$\therefore S_{\triangle A_1BC}=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{11}}{4}$，……………………………………（6 分）

$\therefore d=\frac{3V_{A-A_1BC}}{S_{\triangle A_1BC}}=\frac{\sqrt{66}}{11}$. ……………………………………（7 分）

（Ⅲ）由（Ⅰ）知 $EF/\!/A_1B$，则 EF 与平面 ACC_1A_1 所成的角等于 A_1B 与平面 ACC_1A_1 所成的角. ………（8 分）

取 AC 的中点 M，连接 BM，A_1M，则 $BM\perp AC$.

$\because$ 平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 ABC，$BM\subset$ 平面 ABC，平面 $ABC\cap$ 平面 $ACC_1A_1=AC$，

$\therefore BM\perp$ 平面 ACC_1A_1，$\angle BA_1M$ 即为所求角. ……………………………………（9 分）

在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1BM$ 中，可得 $A_1B=\sqrt{3}$，$BM=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \sin\angle BA_1M=\frac{BM}{A_1B}=\frac{1}{2}$，……………………………………（11 分）

$\therefore \angle BA_1M=\frac{\pi}{6}$，即 EF 与平面 ACC_1A_1 所成的角为$\frac{\pi}{6}$. ……………………………………（12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。