2022～2023 学年第二学期期末调研考试
高一数学试题参考答案

1. D 【解析】本题考查平面向量的垂直，考查数学运算的核心素养.

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6+5\lambda=0$，解得 $\lambda=\frac{6}{5}$.

2. A 【解析】本题考查圆台的体积，考查数学运算的核心素养.

由圆台的体积公式得，该圆台的体积为 $\frac{1}{3}\times3\times(4+\sqrt{4\times9}+9)=19$.

3. C 【解析】本题考查百分位数，考查应用意识与数据处理能力.

这 14 个地区的数据按照从小到大的顺序排列为 594628，1095986，1205440，3136879，3354444，4118908，4212933，5464087，7111106，7300783，7717983，9242610，9413990，10640458. 因为 $85\%\times14=11.9$，所以第 85 百分位数为第 12 项数据，即 9242610.

4. C 【解析】本题考查空间中的平行关系与垂直关系的判定，考查空间想象能力.

过点 P 只能作一个平面与 α 平行，过点 P 可以作无数条直线与 α 平行，过点 P 只能作一条直线与 α 垂直，过点 P 可以作无数个平面与 α 垂直.

5. B 【解析】本题考查古典概型，考查数学运算的核心素养.

样本空间 $\Omega=\{$(周一，周二)，(周一，周三)，(周一，周四)，(周一，周五)，(周一，周六)，(周二，周三)，(周二，周四)，(周二，周五)，(周二，周六)，(周三，周四)，(周三，周五)，(周三，周六)，(周四，周五)，(周四，周六)，(周五，周六)$\}$，共有 15 个样本点. 记事件"他选择的两天恰好是相邻的两天"为事件 A，则 $A=\{$(周一，周二)，(周二，周三)，(周三，周四)，(周四，周五)，(周五，周六)$\}$，共有 5 个样本点，故所求概率为 $\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

6. D 【解析】本题考查正三棱柱的外接球，考查空间想象能力与运算求解能力.

设该正三棱柱两底面的中心为 O_1，O_2，则外接球 O 的球心 O 为线段 O_1O_2 的中点，设球 O 的半径为 R，则 $R^2=(\frac{4}{2})^2+(\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{3})^2=8$，故球 O 的表面积 $S=4\pi R^2=32\pi$.

7. A 【解析】本题考查解三角形的实际应用，考查直观想象与数学运算的核心素养.

记 1 号门的位置为 A，4 号门的位置为 B，8 号门的位置为 C，则根据条件可得 $\angle B=180^\circ-(90^\circ-53^\circ48'+75^\circ48')=68^\circ$，$\angle C=(90^\circ-63^\circ18')-(90^\circ-75^\circ48')=12^\circ30'$.

由 $\frac{AB}{\sin\angle C}=\frac{AC}{\sin\angle B}$，得 $AC=\frac{492\times\sin68^\circ}{\sin12^\circ30'}\approx2112$ m.

8. B 【解析】本题考查投影向量与平面向量的基本定理，考查逻辑推理、数学建模、直观想象的核心素养.

因为 $\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{CO}=\lambda\overrightarrow{CB}$. 又因为 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形且 $AB\perp AC$，O 为斜边 BC 的中点，过 A 作 BC 的垂线 AQ，垂足为 Q. 因为 $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影向量为 $\mu\overrightarrow{BC}$，所以 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影向量为 $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{BO}=\mu\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=(\mu-$

$\frac{1}{2})\overrightarrow{BC}$. 当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时，$\cos\angle AOC=0$，$\mu\cdot\cos\angle AOC=0$；当 $\frac{1}{2}<\mu<1$ 时，如图 1，$\cos\angle AOC=$

$\frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OA}|}=\frac{(\mu-\frac{1}{2})|\overrightarrow{BC}|}{\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|}=2\mu-1$；当 $0<\mu<\frac{1}{2}$ 时，如图 2，$\cos\angle AOC=-\cos\angle AOQ=-\frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OA}|}$

$=\frac{|\mu-\frac{1}{2}||\overrightarrow{BC}|}{\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|}=2\mu-1$.

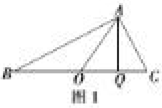


图 1

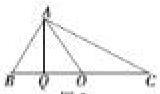


图 2

所以 $\mu\cdot\cos\angle AOC=2\mu^2-\mu=2(\mu-\frac{1}{4})^2-\frac{1}{8}$，因为 $\mu\in(0,1)$，所以当 $\mu=\frac{1}{4}$ 时，

$\mu\cdot\cos\angle AOC$ 取得最小值，且最小值为 $-\frac{1}{8}$.

9. ACD **【解析】本题考查复平面与复数的模，考查数学运算的核心素养.**

依题意可得 $A(-4,2)$，$B(2,1)$，$C(-3,2)$，$D(2,-1)$，则 A 在第二象限，A 与 D 都正确. $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-5)^2+1^2}=\sqrt{26}$，B 错误. 因为 $|z_1|=\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5}$，$|z_2|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，所以 $|z_1|=2|z_2|$，C 正确.

10. BC **【解析】本题考查互斥、对立、相互独立事件的判定，考查逻辑推理的核心素养.**

M 与 N 可以同时发生，M 与 P 不能同时发生，所以 M 与 N 不互斥，M 与 P 互斥，A 错误，B 正确. $P(MN)=\frac{1}{52}=P(M)\cdot P(N)$，C 正确. N 与 P 不对立，D 错误.

11. BC **【解析】本题考查统计中的分层抽样、中位数、平均值、方差，考查数据处理能力.**

由 $10a=1-(0.020+0.025+0.015+0.005)\times10$，解得 $a=0.035$，则 $n=\frac{7}{10a}=20$，A 错误，C 正确. 因为 $(0.020+0.025)\times10=0.45$，所以上述网民的年龄的中位数的估计值为 $30+10\times\frac{0.5-0.45}{0.35}=\frac{220}{7}$，B 正确，D 错误.

12. ACD **【解析】本题考查点、线、面的位置关系与截面、二面角等问题，考查空间想象能力与推理论证能力.**

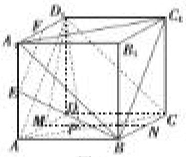


图 1

如图 1，若直线 D_1P 与平面 A_1BC_1 没有公共点，则由平面 ACD_1 // 平面 A_1BC_1，可得 P 的轨迹为线段 AC，轨迹长为 $2\sqrt{2}$，A 正确. 若 $D_1P\perp DE$，则 D_1P 在平面 ADD_1A_1 内的射影与 DE 垂直即可，取 AD 的中点 M，连接 D_1M，则 $D_1M\perp DE$，则 P 在平面 ADD_1A_1 内的射影为 M 即可，取 BC 的中点 N，连接 MN，得 P 的轨迹为线段 MN，长度为 2，B 错误. 如图 2，延长 FE 交 DA 于 I，过 A 作 FE 的延长线的垂线，垂足为 G，易证 G 为 EI 的中点，$BG\perp EI$，所以 $\angle AGB$ 为二面角 $B-EF-D$ 的平面角. 因为 $AG=\frac{1}{2}IE=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\tan\angle AGB=\frac{AB}{AG}=2\sqrt{2}$，C 正确. 由图可知截面为五边形 $EFKCL$，D 正确.

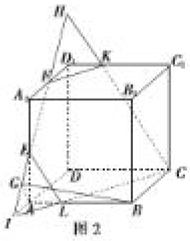


图 2

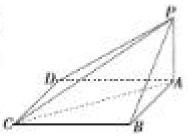
13. B 【解析】本题考查统计中的方差，考查逻辑推理的核心素养.

由图可知三组数据中，B 组的波动性最小，所以 B 组数据的方差最小.

14. 10 【解析】本题考查平面向量的数量积，考查数学运算的核心素养.

在菱形 $OABC$ 中，因为 $OA=OC$，所以 $\sqrt{3^2+x^2}=\sqrt{1^2+3^2}$，解得 $x=\pm1$，又点 A 在第四象限，所以 $x=-1$，所以$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=(4,2)$，故$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3\times4+(-1)\times2=10$.

15. $\frac{3\pi}{4}$ 【解析】本题考查立体几何的新概念与线面角，考查数学抽象与直观想象的核心素养.



如图，连接 AC，因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $\angle PCA$ 为 PC 与底面 $ABCD$ 所成的角，则 $\angle PCA=\frac{\pi}{6}$，所以 $AC=\sqrt{3}PA$. 又 $AD=\sqrt{2}PA$，在矩形 $ABCD$ 中，$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=PA$，则 $AB=CD=PA$，所以 $\angle PBA=\frac{\pi}{4}$. 因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $PA\perp BC$，又 $AB\perp BC$，$AB\cap PA=A$，所以 $BC\perp$ 平面 PAB，所以 $BC\perp PB$，所以顶点 B 的曲率为 $2\pi-(\frac{\pi}{2}\times2+\frac{\pi}{4})=\frac{3\pi}{4}$.

16. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ 【解析】本题考查三角形的面积公式与基本不等式的综合应用，考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

设 $AB=m$，$AC=n$. 由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，得 $\frac{1}{2}mn\sin120^\circ=\frac{1}{2}\times2m\times\sin30^\circ+\frac{1}{2}\times2n$，

即 $\frac{\sqrt{3}}{4}mn=\frac{m}{2}+n\geqslant2\sqrt{\frac{mn}{2}}$，

可得 $mn\geqslant\frac{32}{3}$，当且仅当 $\frac{m}{2}=n=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}mn\geqslant\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

故 $\triangle ABC$ 面积的最小值是 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

17. 解：(1) $\frac{z_2}{z_1}=\frac{2+mi}{1+i}=\frac{(2+mi)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2+m+(m-2)i}{2}$，…………………… 2 分

因为 $\frac{z_2}{z_1}$ 为纯虚数，所以 $\begin{cases}\frac{2+m}{2}=0,\\ \frac{m-2}{2}\neq0,\end{cases}$ …………………… 4 分

解得 $m=-2$. …………………… 5 分

(2) 因为 $\frac{z_2}{z_1}\in\mathbf{R}$，所以 $\frac{m-2}{2}=0$，…………………… 6 分

解得 $m=2$，…………………… 7 分

所以 $3z_1+iz_2=3+3i+2i-2=1+5i$，…………………… 8 分

故 $3z_1+iz_2$ 的实部与虚部之和为 $1+5=6$. …………………… 10 分

18. 解：(1) $\bar{x}_甲=\frac{88+89+91+92+93+93+95+95}{8}=92$，…………………… 2 分

$\bar{x}_{乙}=\frac{88+90+90+90+92+92+92+94}{8}=91$，…………………………………… 4 分

因为 $92>91$，所以甲的面试分数的平均分更高. …………………………………… 6 分

(2)因为笔试分数和面试分数的加权比为 $6:4$，

所以甲的综合分数为 $92\times\frac{6}{10}+92\times\frac{4}{10}=92$，…………………………………… 8 分

乙的综合分数为 $94\times\frac{6}{10}+91\times\frac{4}{10}=92.8$，…………………………………… 10 分

因为 $92.8>92$，所以乙的综合分数更高，故应该录取乙. …………………………………… 12 分

19. 解：(1)因为 $a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=\frac{a+c}{2}+b\cos B$，

所以 $\frac{a(1+\cos C)}{2}+\frac{c(1+\cos A)}{2}=\frac{a+c}{2}+b\cos B$，…………………………………… 2 分

即 $a\cos C+c\cos A=2b\cos B$. …………………………………… 3 分

由正弦定理得 $\sin A\cos C+\sin C\cos A=2\sin B\cos B$，…………………………………… 4 分

即 $\sin(A+C)=2\sin B\cos B$，即 $\sin B=2\sin B\cos B$. …………………………………… 5 分

又 $\sin B>0$，所以 $\cos B=\frac{1}{2}$，由 $B\in(0,\pi)$，得 $B=\frac{\pi}{3}$. …………………………………… 6 分

(2)由$\triangle ABC$的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}$，得$\frac{1}{2}ac\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，则 $ac=1$，…………………………………… 8 分

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-ac$，代入 $b=\sqrt{2}$，得 $a^2+c^2=3$，…………………………………… 10 分

则 $a+c=\sqrt{a^2+2ac+c^2}=\sqrt{5}$，…………………………………… 11 分

故$\triangle ABC$的周长为$\sqrt{2}+\sqrt{5}$. …………………………………… 12 分

20. (1)证明：(方法一)

如图，取 AP 的中点 F，连接 EF，DF. …………………………………… 1 分

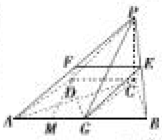
$\because BE=PE$，$AF=PF$，$\therefore EF/\!/AB$ 且 $AB=2EF$，…………………………………… 2 分

$\because AB/\!/CD$ 且 $AB=2CD$，$\therefore EF/\!/CD$ 且 $EF=CD$，…………………………………… 3 分

$\therefore$四边形 $CEFD$ 为平行四边形，…………………………………… 4 分

$\therefore CE/\!/DF$，…………………………………… 5 分

$\because DF\subset$平面 ADP，$CE\not\subset$平面 ADP，$\therefore CE/\!/$平面 ADP. …………………………………… 6 分



(方法二)如图，连接 CG，EG. $\because AB/\!/CD$，$AB=2$，$CD=1$，G 为 AB 的中点，

$\therefore AG/\!/CD$ 且 $AG=CD$，…………………………………… 1 分

$\therefore$四边形 $AGCD$ 为平行四边形，$\therefore CG/\!/AD$，…………………………………… 2 分

$\because AD\subset$平面 ADP，$CG\not\subset$平面 ADP，$\therefore CG/\!/$平面 ADP. …………………………………… 3 分

$\because E$，G 分别为 BP，AB 的中点，$\therefore EG/\!/AP$，同理可得 $EG/\!/$平面 ADP. …………………………………… 4 分

$\because CG\cap EG=G$，$\therefore$平面 $CEG/\!/$平面 ADP，…………………………………… 5 分

$\because CE\subset$平面 CEG，$\therefore CE/\!/$平面 ADP. …………………………………… 6 分

(2)解：选①

如图，连接 AC，过点 D 作 AB 的垂线，垂足为 M，则 $AM=\frac{1}{2}(AB-CD)=\frac{1}{2}$，

则 $AD=\frac{AM}{\cos 60^\circ}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$. ………………………………………………………… 7 分

$\because PC\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore PC\perp CD$，$\because CD=PC=1$，$\therefore PD=\sqrt{2}$. ………………………… 8 分

$\because PC\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore PC\perp AC$，$\because AD=CD=1$，$\angle ADC=120^\circ$，$\therefore AC=\sqrt{3}$，$\therefore AP=2$. …
…………………………………………………………………………………… 9 分

由余弦定理得 $\cos\angle PAD=\frac{3}{4}$，则 $\sin\angle PAD=\frac{\sqrt{7}}{4}$，$\triangle ADP$ 的面积为$\frac{1}{2}\times1\times2\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.
…………………………………………………………………………………… 10 分

$\because CE /\!/$ 平面 ADP，$\therefore$ 点 E 到平面 ADP 的距离等于点 C 到平面 ADP 的距离.

设 C 到平面 ADP 的距离为 h，则由 $V_{C-ADP}=V_{P-ACD}$，

得$\frac{1}{3}h\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{1}{3}\times1\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}$， ………………………………………… 11 分

解得 $h=\frac{\sqrt{21}}{7}$，所以点 E 到平面 ADP 的距离为$\frac{\sqrt{21}}{7}$. ……………………………… 12 分

选②

如图，连接 AC，过点 D 作 AB 的垂线，垂足为 M，则 $AM=\frac{1}{2}(AB-CD)=\frac{1}{2}$，

则 $AD=\frac{AM}{\cos 60^\circ}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$. ………………………………………………………… 7 分

$\because AD=AG=1$，$\angle DAB=60^\circ$，$\therefore\triangle ADG$ 为正三角形，$\therefore AD=AG=DG=CG=CD=1$.

$\because PC\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore PC\perp CG$，$PC\perp CD$，$\because PC=1$，$\therefore PG=PD=\sqrt{2}$， ……………… 8 分

$\therefore\triangle PDG$ 的面积为$\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{2-(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$. ………………………………………… 9 分

$\because E$ 为 PB 的中点，$\therefore$ 点 B 到平面 PDG 的距离等于点 E 到平面 PDG 的距离的 2 倍. …
…………………………………………………………………………………… 10 分

设 B 到平面 PDG 的距离为 h，则由 $V_{B-PDG}=V_{P-BDG}$，

得$\frac{1}{3}h\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{1}{3}\times1\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}$， ………………………………………… 11 分

解得 $h=\frac{\sqrt{21}}{7}$，所以点 E 到平面 PDG 的距离为$\frac{\sqrt{21}}{14}$. ……………………………… 12 分

21. 解：(1)该局至多打 4 个球且甲赢的情况有 3 种，即甲赢前 2 个球，甲输第 1 个球再连赢 2 个球，甲赢第 1 个球输第 2 个球再连赢 2 个球. ………………………………………… 2 分

故该局至多打 4 个球且甲赢的概率为

$\frac{3}{5}\times(1-\frac{2}{3})+(1-\frac{3}{5})\times(1-\frac{2}{3})\times\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times(1-\frac{2}{3})=\frac{9}{25}$. ………………… 5 分

(2)若甲胜，则甲在6个球的胜负情形为胜负胜负胜胜，

则甲胜的概率 $P_1=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times(1-\frac{2}{3})=\frac{4}{125}$， ………………………………… 8分

若乙胜，则甲在6个球的胜负情形为负胜负胜负负，

则乙胜的概率 $P_2=(1-\frac{3}{5})\times(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{3}{5})\times(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{3}{5})\times\frac{2}{3}=\frac{16}{3375}$，………
……………………………………………………………………………………………………… 11分

所以该局恰好打6个球结束的概率 $P=P_1+P_2=\frac{4}{125}+\frac{16}{3375}=\frac{124}{3375}$. ……………… 12分

22.(1)证明：因为 $C_1D_1\perp$ 平面 BCC_1B_1，所以 $C_1D_1\perp B_1C$. ……………………………… 1分
又点 C_1 在平面 B_1CD_1 的射影为 H，即 $C_1H\perp$ 平面 B_1D_1C，所以 $C_1H\perp B_1C$. ……… 2分
因为 $C_1H\cap C_1D_1=C_1$，所以 $B_1C\perp$ 平面 C_1D_1H，所以 $D_1H\perp B_1C$, ……………………… 3分
同理可证 $CH\perp B_1D_1$，所以 H 为 $\triangle B_1D_1C$ 的垂心. ……………………………………… 5分
(2)解：因为 $AB=2BC=2BB_1=4$，所以 $B_1D_1=CD_1$，记 B_1C 的中点为 M，
由(1)知 $H\in D_1M$, ……………………………………………………………………………… 6分
易证 $B_1C\perp$ 平面 ABC_1D_1，$B_1C\subset$ 平面 B_1CD_1，
所以平面 $ABC_1D_1\perp$ 平面 B_1CD_1，…………………………………………………………… 7分
平面 $ABC_1D_1\cap$ 平面 $B_1CD_1=D_1M$，过 A 作 $AN\perp D_1M$ 交 D_1M 于 N，
则 $AN\perp$ 平面 B_1CD_1，因为 $AG\perp$ 平面 B_1CD_1，所以 N 与 G 重合. ……………………… 8分
在四边形 ABC_1D_1 中，$D_1C_1=4$，$C_1M=\sqrt{2}$，$D_1M=\sqrt{D_1C_1^2+C_1M^2}=3\sqrt{2}$，……………… 9分
因为点 C_1 在平面 B_1CD_1 的射影为 H，点 A 在平面 B_1CD_1 的射影为 G，
所以 $C_1H\perp MD_1$，$AG\perp MD_1$，易知 $\mathrm{Rt}\triangle MC_1D_1\backsim\mathrm{Rt}\triangle MHC_1$，

所以 $\frac{D_1M}{C_1M}=\frac{C_1M}{HM}$，得 $HM=\frac{\sqrt{2}}{3}$，

同理得 $D_1G=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，……………………………………………………………………… 10分

则 $GH=2\sqrt{2}$，$AG=\frac{8}{3}$，$S_{\triangle AGH}=\frac{1}{2}AG\cdot GH=\frac{8\sqrt{2}}{3}$，

易知 $B_1M\perp$ 平面 ABC_1D_1，则 $V_{A-B_1GH}=V_{B_1-AGH}=\frac{1}{3}B_1M\cdot S_{\triangle AGH}=\frac{16}{9}$. ……………… 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：zizzsw。