

高二数学

2023.7

本试卷共4页,满分150分,考试时间120分钟.注意事项:

- 1.答题前,考生务必在试卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名.
- 2.回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
- 3.考试结束,考生必须将试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题:本大题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = 8$, $a_6 = 5$, 则 $a_9 =$

- A.1 B.2 C.3 D.4

2.已知直四棱柱的高为1, 其底面四边形 $ABCD$ 水平放置的斜二测直观图为平行四边形 $A'B'C'D'$, $\angle D'A'B' = 45^\circ$, $A'B' = 2A'D' = 2$, 则该直四棱柱的体积为

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{8}{3}$ C.2 D.4

3.在空间直角坐标系中, O 为原点, 已知点 $P(1, 2, -1)$, $A(0, 1, 2)$, 则

- A.点 P 关于点 A 的对称点为 $(2, 3, -4)$
B.点 P 关于 x 轴的对称点为 $(1, -2, -1)$
C.点 P 关于 y 轴的对称点为 $(-1, 2, 1)$
D.点 P 关于平面 xOy 的对称点为 $(1, -2, 1)$

4.已知 $\{a_n\}$ 为正项等比数列, 若 $a_2 + a_6 = 10$, $a_4 a_8 = 64$, 则 $a_4 =$

- A.6 B.4 C.2 D. $\sqrt{2}$

5.设 m , n 是两条不同的直线, α , β 是两个不同的平面, 则

- A.若 $m \parallel n$, $m \parallel \alpha$, $n \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$
B.若 $\alpha \parallel \beta$, $m \subset \alpha$, $n \subset \beta$, 则 $m \parallel n$
C.若 $m \perp \alpha$, $m \parallel n$, $n \subset \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$
D.若 $\alpha \perp \beta$, $m \subset \alpha$, $n \subset \beta$, 则 $m \perp n$

6. 设 a_1, a_2, a_3, a_4 是各项均不为零的等差数列, 且公差 $d \neq 0$, 若将此数列删去 a_2 得到的新数列 (按原来

的顺序) 是等比数列, 则 $\frac{d}{a_1}$ 的值为

- A. $-\frac{1}{6}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. -1

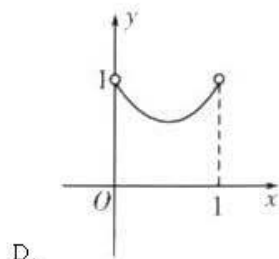
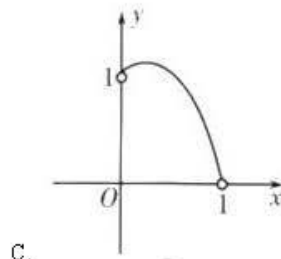
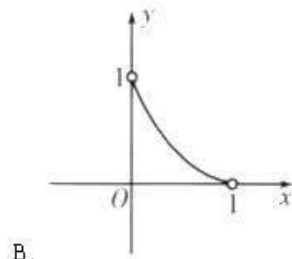
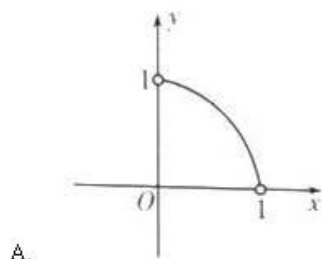
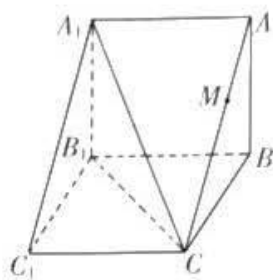
7. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积 $T_n = 1 - \frac{2}{15}n$, 则 a_n 的最大值与最小值的和为

- A. -3 B. -1 C. 2 D. 3

8. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $A_1B_1 \perp B_1C_1$, 四边形 A_1B_1BA 边长为 1 的正方形, $BC=2$, M 是

AC 上的一个动点, 过点 M 作平面 $\alpha \parallel$ 平面 B_1CB , 记平面 α 截四棱锥 $C-A_1B_1BA$ 所得图形的面积为 y ,

平面 α 与平面 B_1CB 之间的距离为 x , 则函数 $y = f(x)$ 的图象大致是



二、多项选择题: 本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1 = 9$, $S_3 = 21$, 则

- A. 数列的公差为 -2 B. $a_2 = 3$
C. $a_n = 11 - 2n$ D. 数列 $\{a_n\}$ 为递减数列

10. 已知某圆锥的顶点为 P , 其底面半径为 $\sqrt{3}$, 侧面积为 $2\sqrt{3}\pi$, 若 A, B 是底面圆周上的两个动点, 则

- A. 圆锥的母线长为 2 B. 圆锥的侧面展开图的圆心角为 $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$
C. PA 与圆锥底面所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$ D. $\triangle PAB$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$

11. 斐波那契数列又称黄金分割数列, 因数学家列昂纳多·斐波那契以兔子繁殖为例子而引入, 故又称为"兔子数列". 斐波那契数列用递推的方式可如下定义: 用 a_n 表示斐波那契数列的第 n 项, 则数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = a_2 = 1$,

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, 记 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则

- A. $a_7 = 13$ B. $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2023} = a_{2024}$
C. $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2022} = a_{2023} - 2$ D. $S_{2023} = a_{2025} - 1$

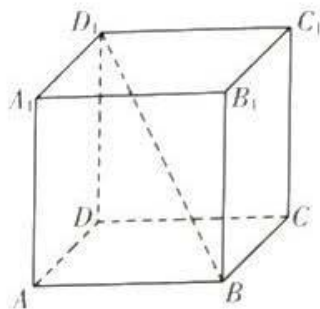
12. 如图, 四个半径为 2 的实心小球两两相切, 则



- A. 这四个实心小球所形成的空隙内可以放入一个半径为 $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ 的小球
B. 这四个实心小球所形成的空隙内可以放入一个棱长为 $\frac{6\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}{3}$ 的正方体
C. 存在一个侧面积为 $(20 - 8\sqrt{6})\pi$ 的圆柱可以放进这四个实心小球所形成的空隙内
D. 这四个实心小球可以放入一个半径为 $\sqrt{6} + 2$ 的大球内部

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡的相应位置

13. 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 与 BD_1 垂直的面对角线可以是_____。(写出一条即可)



14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n}$, 则 $a_9 =$ _____.

15. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\triangle PCD$ 为等边三角形, 且平面 $PCD \perp$ 平面 $ABCD$, 记直线 PC 与平面 $ABCD$ 所成的角为 α , 二面角 $P-AD-C$ 的大小为 β , 则 α _____ β (填“>”“<”“≥”“≤”).

16. 如图, 将正整数按下表的规律排列, 把行与列交叉处的那个数称为某行某列的元素, 记作 $a_{(i,j)}$ ($i, j \in \mathbb{N}^+$).

如第 2 行第 4 列的数是 15, 记作 $a_{(2,4)} = 15$, 则有序数对 $(a_{(32,24)}, a_{(15,15)})$ 是 _____.

1	4	→	5	16	→	17	
↓	↑		↓	↑		↓	
2	→	3	6	15		18	
			↓	↑			
9	←	8	←	7	14	19	
↓				↑		↓	
10	→	11	→	12	→	13	20
							↓
25	←	24	←	23	←	22	←
↓							21
.....							

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

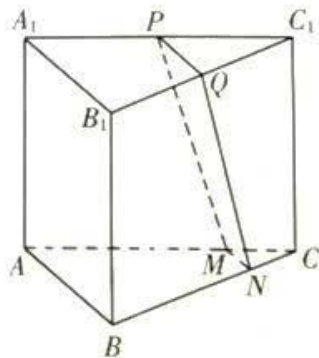
17. (10 分)

在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB = AA_1 = 2$, P, Q 分别为 A_1C_1, B_1C_1 的中点, 点 M, N 分别在棱 AC

和 BC 上, 且 $\frac{CM}{MA} = \frac{CN}{NB} = \frac{1}{3}$.

(1) 证明: 四边形 $PMNQ$ 为梯形, 并求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的表面积;

(2) 求三棱台 PQC_1-MNC 的体积.



18. (12分)

已知递增等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_3=13$ ， $a_3^2=3a_4$ ，等差数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=a_1$ ， $b_2=a_2-1$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $c_n = \begin{cases} -a_{n+1}b_n, n \text{ 为奇数}, \\ a_nb_n, n \text{ 为偶数}. \end{cases}$ 请判断 $c_{2n-1}+c_{2n}$ 与 a_{2n} 的大小关系，并求数列 $\{c_n\}$ 的前20项和。

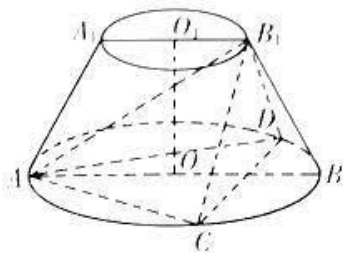
19. (12分)

在如图所示的圆台中， AB 是下底面圆 O 的直径， A_1B_1 是上底面圆 O_1 的直径， $AB \parallel A_1B_1$ ， $AB=2A_1B_1=4$ ，

$OO_1=\sqrt{3}$ ， $\triangle ACD$ 为圆 O 的内接正三角形。

(1) 证明： $OO_1 \parallel$ 平面 B_1CD ；

(2) 求直线 CD 与平面 AB_1D 所成角的正弦值。



20. (12分)

中小微企业是国民经济的重要组成部分，某小微企业准备投入专项资金进行技术创新，以增强自身的竞争力。根据规划，本年度投入专项资金800万元，可实现销售收入40万元；以后每年投入的专项资金是上一年的一半，销售收入比上一年多80万元。同时，当预计投入的专项资金低于20万元时，就按20万元投入，销售收入则与上一年销售收入相等。

(1) 设第 n 年（本年度为第一年）投入的专项资金为 a_n 万元，销售收入为 b_n 万元，请写出 a_n ， b_n 的表达式；

(2) 至少要经过多少年后，总销售收入就能超过专项资金的总投入？

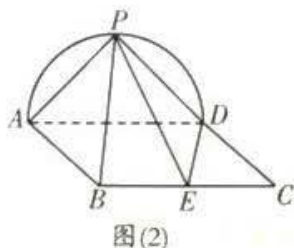
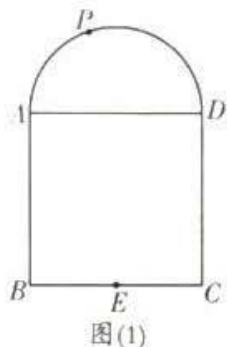
21. (12分)

如图(1), 已知四边形 $ABCD$ 是边长为2的正方形, 点 P 在以 AD 为直径的半圆弧上, 点 E 为 BC 的中点.

现将半圆沿 AD 折起, 如图(2), 使异面直线 PD 与 BC 所成的角为 45° , 此时 $BP = \sqrt{6}$.

(1) 证明: $AB \perp$ 平面 PAD , 并求点 P 到平面 $ABCD$ 的距离;

(2) 若平面 $PAB \cap$ 平面 $PDE = l$, $Q \in l$, 当平面 QAB 与平面 QCD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 时, 求 PQ 的长度.



22. (12分)

已知正项数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 8$, 点 $(a_{n+1}, a_n^2 + 2a_n)$ 在直线 $y = x$ 上, $b_n = \lg(a_n + 1)$, 其中 $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 证明: 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列;

(2) 设 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求 S_n ;

(3) 记 $c_n = \frac{2(a_n + 1)}{a_n(a_n + 2)}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 试探究是否存在非零常数 λ 和 μ , 使得 $T_n + \frac{1}{\lambda 10^{S_n} + \mu}$

为定值? 若存在, 求出 λ 和 μ 的值; 若不存在, 请说明理由.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线