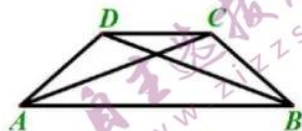


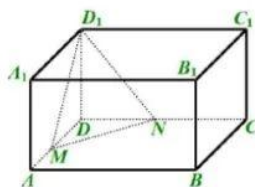
2021 年全国高中数学联赛（福建赛区）预赛
暨 2021 年福建省高中数学竞赛试卷参考答案及评分标准
(考试时间：2021 年 5 月 23 日上午 9:00—11:30, 满分 160 分)

一、填空题（共 10 小题，每小题 6 分，满分 60 分。请直接将答案写在题中的横线上）

1. 若 $x_1=1$, $x_2=1-i$, $x_3=1+i$ (i 为虚数单位) 为方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个解, 则 $a+b-c=$ _____.
2. 已知 $f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}$, 若 $f(a-2)<f(2a+1)$ 成立, 则 a 的取值范围为 _____.
3. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 已知 $\cos \angle BAD=\frac{5}{4}$, $\angle BAC=\angle DAC$, $AD<AB$, 且 $AB=5$, $AC=BD=\sqrt{14}$. 若 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), 则 $\lambda+\mu=$ _____.



(第 3 题图)



(第 4 题图)

4. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $AB=BC=6$, $AA_1=2$, 点 M 、 N 分别在棱 DA 、 DC 上, 二面角 D_1-MN-D 的大小为 45° . 若三棱锥 D_1-DMN 的体积为 $\frac{16\sqrt{3}}{9}$, 则三棱锥 D_1-DMN 外接球的表面积为 _____.
5. 已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个二次项系数均为 1 的二次函数. 若 $g(6)=35$, $\frac{f(-1)}{g(-1)}=\frac{f(1)}{g(1)}=\frac{21}{20}$, 则 $f(6)=$ _____.
6. 若关于 x 的不等式 $(x-2)e^x < ax+1$ 有且仅有三个不同的整数解, 则整数 a 的最小值为 _____.
7. 若正实数 x, y 满足 $x(x+2y)=9$, 则 x^5y 的最大值为 _____.
8. 已知离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 的双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0, b>0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , P 为双曲线上一点, R, r 分别为 $\triangle PF_1F_2$ 的外接圆、内切圆半径. 若 $\angle F_1PF_2=60^\circ$, 则 $\frac{R}{r}=$ _____.

9. 若 5π 是函数 $f(x) = \cos nx \cdot \sin \frac{80}{n^2}x$ 的一个周期, 则正整数 n 的所有可能取值为_____.

10. 若整数 a, b, c 满足: $0 \leq a \leq 10, 0 \leq b \leq 10, 0 \leq c \leq 10, 10 \leq a+b+c \leq 20$, 则满足条件的有序数组 (a, b, c) 共有_____组.

二、解答题 (共 5 小题, 每小题 20 分, 满分 100 分. 要求写出解题过程)

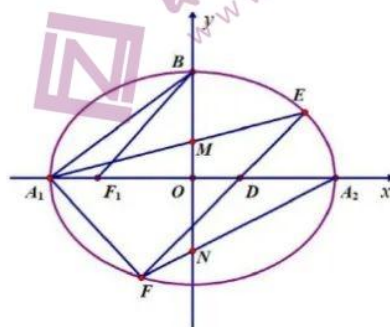
11. 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1} - 1, b_n = \frac{a_n - 1}{2^n} (n \in \mathbb{N}^*)$

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

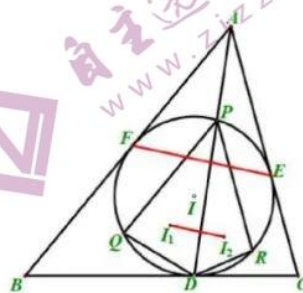
(2) 设 $c_n = \frac{(-1)^n}{b_n}, T_n$ 是数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项的和, 求证: $T_{2n} > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{2}{3}$, A_1 、 A_2 分别为椭圆 C 的左、右顶点, B 为椭圆 C 的上顶点, F_1 为椭圆 C 的左焦点, 且 $\triangle A_1 F_1 B$ 的面积为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 设过点 $D(1, 0)$ 的动直线 l 交椭圆 C 于 E 、 F 两点 (点 E 在 x 轴上方), M 、 N 分别为直线 $A_1 E$ 、 $A_2 F$ 与 y 轴的交点, 求 $\frac{|OM|}{|ON|}$ 的值.



13. 如图, $\triangle ABC$ 的内切圆 I 与三边分别相切于点 D , E , F , 连接 AD 与内切圆 I 的另一个交点为 P , 过点 P 分别作 AC , AB 的平行线, 与圆 I 的另一个交点分别为 R , Q , $\triangle DPQ$ 和 $\triangle DPR$ 的内心分别为 I_1 和 I_2 , 求证: $I_1 I_2 \parallel EF$.



14. 已知 $f(x) = e^x - x^a$, $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$.

(1) 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的最大值;

(2) 若 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点, 且 $x_1 > x_2$, 求证: $x_1 + x_2 > 2a$.

15. 设数列 $\{a_n\}$ 是正整数数列, 满足: $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + (n+1, a_n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

(1) 证明: 当 $a = 3$ 时, 存在唯一一个正整数 k , 使得 $a_k = 2k$;

(2) 若 $a > 3$, 试探究满足 $a_k = 2k$ 的正整数 k 的存在性及其个数, 并证明你的结论.

注: 这里 (x, y) 表示正整数 x, y 的最大公约数.

2021 年全国高中数学联赛（福建赛区）预赛
暨 2021 年福建省高中数学竞赛试卷参考答案及评分标准
(考试时间：2021 年 5 月 23 日上午 9:00—11:30, 满分 160 分)

一、填空题（共 10 小题，每小题 6 分，满分 60 分. 请直接将答案写在题中的横线上）

1. 若 $x_1=1$, $x_2=1-i$, $x_3=1+i$ (i 为虚数单位) 为方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个解, 则 $a+b+c=$ _____.

【答案】 3

【解答】 依题意有,

$$x^3+ax^2+bx+c=(x-1)[x-(1-i)][x-(1+i)]=(x-1)(x^2-2x+2)=x^3-3x^2+4x-2.$$

于是, $a=-3$, $b=4$, $c=-2$.

所以, $a+b+c=-3+4+(-2)=3$.

2. 已知 $f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}$, 若 $f(a-2)<f(2a+1)$ 成立, 则 a 的取值范围为_____.

【答案】 $(-3, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

【解答】 易知 $f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 递减.

所以, $|a-2|>|2a+1|>0$.

解得, $-3<a<\frac{1}{3}$, 且 $a \neq -\frac{1}{2}$.

所以, a 的取值范围为 $(-3, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

3. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 已知 $\cos \angle BAD = \frac{3}{4}$, $\angle BAC = \angle DAC$, $AD < AB$, 且 $AB=5$, $AC=BD=\sqrt{14}$. 若 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), 则 $\lambda+\mu=$ _____.

【答案】 $\frac{7}{5}$

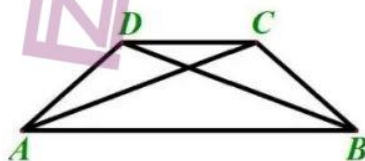
【解答】 在 $\triangle ABD$ 中由余弦定理, 得

$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB \cdot AD \cdot \cos \angle BAD.$$

所以, $14=25+AD^2-2 \cdot 5 \cdot AD \cdot \frac{3}{4}$.

解得, $AD=2$, 或 $AD=\frac{11}{2}$ (由 $AD < AB=5$, 舍去).

因此, $AD=2$.



(第3题图)

解法一：如图，在 AB 上取点 E ，使得 $AE = 2$ ，连接 DE ，交 AC 于点 F 。

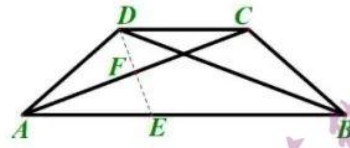
则由 AC 为 $\angle BAD$ 的平分线知， $AF \perp DE$ ， F 为 DE 中点。

在 $\triangle ADE$ 中由余弦定理，得 $DE^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} = 2$ 。

所以， $AF = \sqrt{AE^2 - (\frac{1}{2}DE)^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2} = \frac{1}{2}AC$ 。

所以， $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ 。

所以， $\lambda = \frac{2}{5}$ ， $\mu = 1$ ， $\lambda + \mu = \frac{7}{5}$ 。



(第3题答题图)

解法二：由 AC 平分 $\angle BAD$ ，可设 $\overrightarrow{AC} = m(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|})$ ($m > 0$)。

因此， $\overrightarrow{AC} = m(\frac{\overrightarrow{AB}}{5} + \frac{\overrightarrow{AD}}{2})$ ，

$\overrightarrow{AC}^2 = m^2 \cdot (\frac{\overrightarrow{AB}}{5} + \frac{\overrightarrow{AD}}{2})^2 = m^2 \cdot (\frac{\overrightarrow{AB}^2}{5^2} + 2 \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{5} \cdot \frac{\overrightarrow{AD}}{2} + \frac{\overrightarrow{AD}^2}{2^2}) = m^2 \cdot (1 + 2 \cdot \cos \angle BAD + 1) = \frac{7}{2}m^2$ 。

又 $AC = \sqrt{14}$ ，

所以， $\frac{7}{2}m^2 = 14$ ， $m = 2$ ， $\overrightarrow{AC} = 2(\frac{\overrightarrow{AB}}{5} + \frac{\overrightarrow{AD}}{2}) = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ 。

所以， $\lambda = \frac{2}{5}$ ， $\mu = 1$ ， $\lambda + \mu = \frac{7}{5}$ 。

4. 如图，在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $AB = BC = 6$ ， $AA_1 = 2$ ，点 M 、 N 分别在棱 DA 、 DC 上，二面角 $D_1 - MN - D$ 的大小为 45° ，若三棱锥 $D_1 - DMN$ 的体积为 $\frac{16\sqrt{3}}{9}$ ，则三棱锥 $D_1 - DMN$ 外接球的表面积为_____。

【答案】 $\frac{76}{3}\pi$

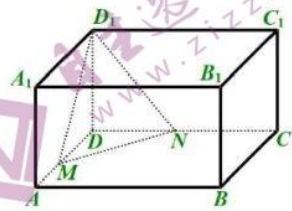
【解答】 如图，作 $DE \perp MN$ 于 E ，连接 D_1E 。

则由正方体的性质知， $MN \perp D_1D$ ，于是 $MN \perp$ 平面 D_1DE ， $MN \perp D_1E$ 。

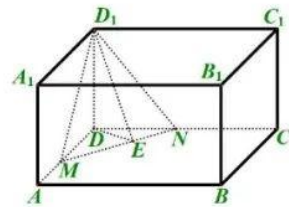
所以， $\angle D_1ED$ 为二面角 $D_1 - MN - D$ 的平面角， $\angle D_1ED = 45^\circ$ ， $DE = D_1D = 2$ 。

$V_{D_1-DMN} = \frac{1}{3} \cdot D_1D \cdot S_{\triangle DMN} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot MN) = \frac{16\sqrt{3}}{9}$ ，

因此， $MN = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ 。



(第4题图)



(第4题答题图)

设三棱锥 D_1-DMN 外接球半径为 R ，则由 DM 、 DN 、 DD_1 两两互相垂直，得

$$2R = \sqrt{DD_1^2 + DM^2 + DN^2} = \sqrt{DD_1^2 + MN^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{76}{3}}.$$

因此，三棱锥 D_1-DMN 外接球的表面积为 $4\pi R^2 = \frac{76\pi}{3}$.

5. 已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个二次项系数均为 1 的二次函数. 若 $g(6)=35$,

$$\frac{f(-1)}{g(-1)} = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{21}{20}, \text{ 则 } f(6) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 35

【解答】解法一：设 $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$ ，则由题设条件可得

$$20(1-a+b) = 21(1-c+d) \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad 20(1+a+b) = 21(1+c+d) \cdots \cdots \textcircled{2}.$$

①、② 两式左右两边分别相加，得 $40 + 40b = 42 + 42d$, $20b = 1 + 21d$;

①、② 两式左右两边分别相减，得 $-40a = -42c$, $20a = 21c$.

另由 $g(6) = 35$ ，得 $36 + 6c + d = 35$.

$$\text{所以, } 36 + 6 \times \frac{20}{21}a + \frac{20b-1}{21} = 35, \quad 6a + b = -1.$$

$$\text{所以, } f(6) = 36 + 6a + b = 35.$$

解法二：设 $h(x) = 21g(x) - 20f(x)$ ，则由条件知 $h(x)$ 是二次项系数为 1 的二次函数.

$$\text{又 } h(-1) = 21g(-1) - 20f(-1) = 0, \quad h(1) = 21g(1) - 20f(1) = 0,$$

$$\text{所以, } h(x) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1.$$

$$\text{因此, } h(6) = 21g(6) - 20f(6) = 6^2 - 1 = 35.$$

$$\text{所以, } 21 \times 35 - 20f(6) = 35, \quad f(6) = 35.$$

6. 若关于 x 的不等式 $(x-2)e^x < ax+1$ 有且仅有三个不同的整数解，则整数 a 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 3

【解答】设 $f(x) = (x-2)e^x$, $g(x) = ax+1$.

则 $f'(x) = (x-1)e^x$, $x < 1$ 时, $f'(x) < 0$; $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$.

因此, $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上递减, 在区间 $(1, +\infty)$ 上递增;

且 $x < 2$ 时, $f(x) < 0$; $x > 2$ 时, $f(x) > 0$.

由此作出 $f(x)$ 的草图如右图所示.

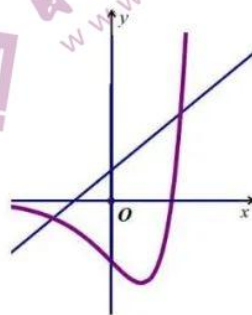
又 $g(x)$ 的图像是过点 $(0, 1)$ 的直线, 结合图像可知 $a > 0$.

由于 $a > 0$ 时, $f(0) = -2 < g(0) = 1$; $f(1) = -e < g(1) = a+1$;

$$f(2) = 0 < g(2) = 2a+1,$$

因此, 0, 1, 2 是不等式 $(x-2)e^x < ax+1$ 的三个整数解.

由于不等式 $(x-2)e^x < ax+1$ 有且仅有三个不同的整数解,



(第 6 题答题图)

所以, $\begin{cases} f(-1) \geq g(-1) \\ f(3) \geq g(3) \end{cases}$, 即 $\begin{cases} -3e^{-1} \geq -a+1 \\ e^3 \geq 3a+1 \end{cases}$, $1+\frac{3}{e} \leq a \leq \frac{e^3-1}{3}$.

经检验, $a=3$ 符合要求.

所以, 符合条件的 a 的最小值为 3.

7. 若正实数 x, y 满足 $x(x+2y)=9$, 则 x^5y 的最大值为 _____.

【答案】 54

【解答】 解法一: 由题设及平均不等式知,

$$9 = x(x+2y) = x\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + 2y\right) \geq x \cdot 3\sqrt{\frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}x \cdot 2y}.$$

所以, $3^3 \geq x^3 \cdot \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}x \cdot 2y$, $x^5y \leq 2 \cdot 3^3 = 54$, 当且仅当 $\frac{1}{2}x = 2y$, 即 $x = \sqrt{6}$, $y = \frac{\sqrt{6}}{4}$ 时

等号成立.

所以, x^5y 的最大值为 54.

解法二: 由题设, 得 $y = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{x} - x\right)$ ($0 < x < 3$).

$$\text{所以, } x^5y = x^5 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{9}{x} - x\right) = \frac{1}{2}(9x^4 - x^6).$$

$$\text{设 } f(x) = \frac{1}{2}(9x^4 - x^6), \text{ 则 } f'(x) = \frac{1}{2}(36x^3 - 6x^5) = -3x^3(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6}),$$

$0 < x < \sqrt{6}$ 时, $f'(x) > 0$; $\sqrt{6} < x < 3$ 时, $f'(x) < 0$.

所以, $f(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{6}]$ 上单调递增, 在区间 $[\sqrt{6}, 3)$ 上单调递减.

所以, $x = \sqrt{6}$ 时, $f(x)$ 有最大值 $f(\sqrt{6}) = 54$.

因此, $x = \sqrt{6}$, $y = \frac{\sqrt{6}}{4}$ 时, x^5y 取最大值 54.

所以, x^5y 的最大值为 54.

8. 已知离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 的双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , P 为双曲线上一点, R, r 分别为 $\triangle PF_1F_2$ 的外接圆、内切圆半径. 若 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, 则 $\frac{R}{r} =$ _____.

【答案】 $2\sqrt{2} + 2$

【解答】 解法一: 依题意, $c = \frac{\sqrt{6}}{2}a$.

在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 由正弦定理得, $2R = \frac{2c}{\sin \angle F_1PF_2} = \frac{\sqrt{6}a}{\sin 60^\circ} = 2\sqrt{2}a$, $R = \sqrt{2}a$.

如图,不妨设点 P 在双曲线右支上, $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆 I 切 x 轴于点 D , 则由双曲线性质知, D 为双曲线的右顶点, $|F_1D| = c+a$, $|F_2D| = c-a$.

$$\text{则 } \tan \angle IF_1F_2 = \frac{ID}{F_1D} = \frac{r}{c+a}, \quad \tan \angle IF_2F_1 = \frac{ID}{F_2D} = \frac{r}{c-a}.$$

$$\text{又 } \angle IF_1F_2 + \angle IF_2F_1 = 60^\circ, \text{ 因此, } \tan(\angle IF_1F_2 + \angle IF_2F_1) = \frac{\frac{r}{c+a} + \frac{r}{c-a}}{1 - \frac{r}{c+a} \cdot \frac{r}{c-a}} = \frac{2cr}{(c^2 - a^2) - r^2} = \sqrt{3}.$$

将 $c = \frac{\sqrt{6}}{2}a$ 代入上式, 并整理得 $2r^2 + 2\sqrt{2}ar - a^2 = 0$.

$$\text{结合 } r > 0, \text{ 解得 } r = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}a = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}a.$$

$$\text{所以, } \frac{R}{r} = \sqrt{2}(2 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 2.$$

解法二: 依题意, $c = \frac{\sqrt{6}}{2}a$.

记 $|PF_1| = r_1$, $|PF_2| = r_2$, 不妨设点 P 在双曲线右支上, 则 $r_1 - r_2 = 2a$.

在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 由正弦定理得,

$$2R = \frac{r_1}{\sin \angle PF_2F_1} = \frac{r_2}{\sin \angle PF_1F_2} = \frac{2c}{\sin \angle F_1PF_2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}c = 2\sqrt{2}a.$$

所以, $R = \sqrt{2}a$, 且

$$\begin{aligned} 2a &= r_1 - r_2 = 2\sqrt{2}a \cdot (\sin \angle PF_2F_1 - \sin \angle PF_1F_2) = 2\sqrt{2}a \cdot [\sin(120^\circ - \angle PF_1F_2) - \sin \angle PF_1F_2] \\ &= 2\sqrt{2}a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \angle PF_1F_2 + \frac{1}{2} \sin \angle PF_1F_2 - \sin \angle PF_1F_2 \right) = 2\sqrt{2}a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \angle PF_1F_2 - \frac{1}{2} \sin \angle PF_1F_2 \right) \\ &= 2\sqrt{2}a \cdot \cos(\angle PF_1F_2 + 30^\circ). \end{aligned}$$

$$\text{因此, } \cos(\angle PF_1F_2 + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

又 $0^\circ < \angle PF_1F_2 < 90^\circ$, $30^\circ < \angle PF_1F_2 + 30^\circ < 120^\circ$,

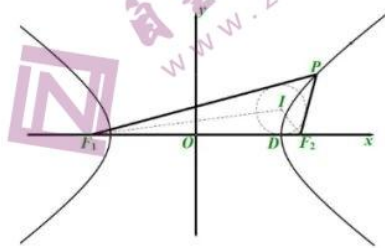
所以, $\angle PF_1F_2 + 30^\circ = 45^\circ$, $\angle PF_1F_2 = 15^\circ$,

$$r_2 = 2\sqrt{2}a \cdot \sin \angle PF_1F_2 = 2\sqrt{2}a \cdot \sin 15^\circ = 2\sqrt{2}a \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = (\sqrt{3} - 1)a, \quad r_1 = (\sqrt{3} + 1)a.$$

$$\triangle PF_1F_2 \text{ 周长 } l = r_1 + r_2 + 2c = (\sqrt{3} + 1)a + (\sqrt{3} - 1)a + \sqrt{6}a = (2\sqrt{3} + \sqrt{6})a,$$

$$\triangle PF_1F_2 \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}r_1r_2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2. \text{ 由 } S = r \cdot \frac{l}{2}, \text{ 得 } r = \frac{\sqrt{3}a}{2\sqrt{3} + \sqrt{6}} = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}a.$$

$$\text{所以, } \frac{R}{r} = \sqrt{2}(2 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 2.$$



(第8题答题图)

9. 若 5π 是函数 $f(x) = \cos nx \cdot \sin \frac{80}{n^2}x$ 的一个周期, 则正整数 n 的所有可能取值为_____.

【答案】 2, 10

【解答】 由 5π 是函数 $f(x) = \cos nx \cdot \sin \frac{80}{n^2}x$ 的一个周期, 得

$$f(5\pi) = \cos 5n\pi \cdot \sin \frac{80}{n^2} \cdot 5\pi = f(0) = 0.$$

由于 n 为正整数时, $\cos 5n\pi = \pm 1 \neq 0$, 于是 $\sin \frac{400}{n^2}\pi = 0$.

所以, $\frac{400}{n^2}\pi = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), $n^2 \mid 400$.

于是, $n = 1, 2, 4, 5, 10, 20$.

将 $n = 1, 2, 4, 5, 10, 20$ 逐一代入验证可知, $n = 2, 10$.

所以, 正整数 n 的所有可能取值为 2, 10.

10. 若整数 a, b, c 满足: $0 \leq a \leq 10, 0 \leq b \leq 10, 0 \leq c \leq 10, 10 \leq a+b+c \leq 20$, 则满足条件的有序数组 (a, b, c) 共有_____组.

【答案】 891

【解答】解法一: 设 $a+b=t$, 则 $0 \leq t \leq 20$.

当 $0 \leq t \leq 10$ 时, 满足条件的有序数对 (a, b) 有 $t+1$ 对; 此时, $10-t \leq c \leq 10$, c 的取值有 $t+1$ 种情形, 满足条件的有序数组 (a, b, c) 有 $(t+1)^2$ 组.

当 $11 \leq t \leq 20$ 时, 满足条件的有序数对 (a, b) 有 $21-t$ 对; 此时, $0 \leq c \leq 20-t$, c 的取值有 $21-t$ 种情形, 满足条件的有序数组 (a, b, c) 有 $(21-t)^2$ 组.

所以, 满足条件的有序数组 (a, b, c) 共有

$$\sum_{t=0}^{10} (t+1)^2 + \sum_{t=11}^{20} (21-t)^2 = 2(1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2) + 11^2 = 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 121 = 891 \text{ 组}.$$

解法二: 设 $a+b+c=k$.

当 $k=10$ 时, 满足条件的有序数组 (a, b, c) 有 C_{12}^2 组.

当 $11 \leq k \leq 20$ 时, 满足条件的有序数组 (a, b, c) 有 $C_{k+2}^2 - 3C_{k-9}^2$ 组.

所以, 满足条件的有序数组 (a, b, c) 共有

$$\begin{aligned} C_{12}^2 + \sum_{k=11}^{20} (C_{k+2}^2 - 3C_{k-9}^2) &= (C_{12}^2 + C_{13}^2 + \cdots + C_{22}^2) - 3(C_2^2 + C_3^2 + \cdots + C_{11}^2) \\ &= (C_2^2 + C_3^2 + \cdots + C_{22}^2) - 4(C_2^2 + C_3^2 + \cdots + C_{11}^2) \\ &= C_{23}^3 - 4C_{12}^3 = \frac{23 \times 22 \times 21}{6} - 4 \times \frac{12 \times 11 \times 10}{6} = 891 \text{ 组}. \end{aligned}$$

二、解答题（共 5 小题，每小题 20 分，满分 100 分. 要求写出解题过程）

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1} - 1$, $b_n = \frac{a_n - 1}{2^n}$ ($n \in N^+$).

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = \frac{(-1)^n}{b_n}$, T_n 是数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项的和, 求证: $T_{2n} > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【解答】(1) 由 $b_n = \frac{a_n - 1}{2^n}$, 得 $a_n = 2^n b_n + 1$, $a_{n+1} = 2^{n+1} b_{n+1} + 1$, 代入 $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1} - 1$,
得 $2^{n+1} b_{n+1} + 1 = 2(2^n b_n + 1) + 2^{n+1} - 1$.

所以, $b_{n+1} - b_n = 1$, 数列 $\{b_{n+1} - b_n\}$ 为等差数列. 5 分

$$\text{又 } b_1 = \frac{a_1 - 1}{2} = 1,$$

所以, $b_n = 1 + 1 \times (n-1) = n$ 10 分

(2) 由 (1) 知, $c_n = \frac{(-1)^n}{b_n} = \frac{(-1)^n}{n}$.

所以,

$$\begin{aligned} T_{2n} &= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} = -(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}) + 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n}) \\ &= -(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}) + 2 \cdot \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}) = -(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}) \end{aligned}$$

..... 15 分

由柯西不等式知

$$\begin{aligned} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n})^2 &\leq (1^2 + 1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2) \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right] \\ &< n \cdot \left[\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n)} \right] = n \cdot (\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{所以, } \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以, $T_{2n} > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 20 分

12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{2}{3}$, A_1 、 A_2 分别为椭圆 C 的左、右顶点, B 为椭圆 C 的上顶点, F_1 为椭圆 C 的左焦点, 且 $\triangle A_1 F_1 B$ 的面积为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设过点 $D(1, 0)$ 的动直线 l 交椭圆 C 于 E 、 F 两点 (点 E 在 x 轴上方), M 、 N 分别为直线 $A_1 E$ 、 $A_2 F$ 与 y 轴的交点, 求 $\frac{|OM|}{|ON|}$ 的值.

【解答】(1) 由椭圆 C 的离心率为 $\frac{2}{3}$, 得 $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$, 于是 $a = \frac{3}{2}c$, $b = \frac{\sqrt{5}}{2}c = |OB|$.

所以, $|A_1 F_1| = \frac{1}{2}c$, $S_{\triangle A_1 F_1 B} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}c \times \frac{\sqrt{5}}{2}c = \frac{\sqrt{5}}{8}c^2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

因此, $c = 2$, $a = 3$, $b = \sqrt{5}$.

所以, 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 5 分

(2) 如图, 易知直线 l 斜率不为 0, 设 l 方程为 $x = my + 1$.

由 $\begin{cases} x = my + 1 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \end{cases}$, 得 $(5m^2 + 9)y^2 + 10my - 40 = 0$.

设 $E(x_1, y_1)$, $F(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = \frac{-10m}{5m^2 + 9}$, $y_1 y_2 = \frac{-40}{5m^2 + 9}$.

由直线 $A_1 E$ 方程 $y = \frac{y_1}{x_1 + 3}(x + 3)$, 得 $y_M = \frac{3y_1}{x_1 + 3}$;

由直线 $A_2 F$ 方程 $y = \frac{y_2}{x_2 - 3}(x - 3)$, 得 $y_N = \frac{-3y_2}{x_2 - 3}$ 10 分

由此可得, $\frac{|OM|}{|ON|} = \frac{y_M}{-y_N} = \frac{y_1(x_2 - 3)}{y_2(x_1 + 3)} = \frac{y_1(my_2 - 2)}{y_2(my_1 + 4)}$.

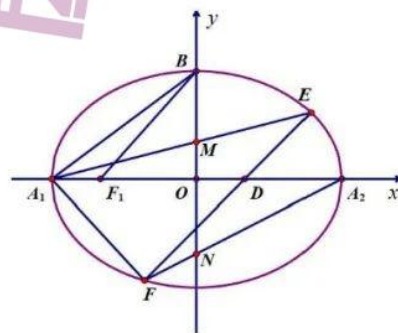
$\frac{y_1 \cdot (my_2 - 2)}{y_2 \cdot (my_1 + 4)} - \frac{1}{2} = \frac{2y_1 \cdot (my_2 - 2) - y_2 \cdot (my_1 + 4)}{2y_2 \cdot (my_1 + 4)} = \frac{my_1 y_2 - 4(y_1 + y_2)}{2y_2 \cdot (my_1 + 4)}$ 15 分

由于 $my_1 y_2 - 4(y_1 + y_2) = m \cdot \frac{-40}{5m^2 + 9} - 4 \cdot \frac{-10m}{5m^2 + 9} = 0$, 因此, $\frac{y_1 \cdot (my_2 - 2)}{y_2 \cdot (my_1 + 4)} = \frac{1}{2}$.

所以, $\frac{|OM|}{|ON|} = \frac{1}{2}$ 20 分

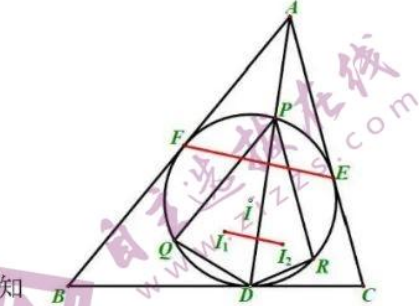
注: 由于当 $EF \perp x$ 轴, $E(1, \frac{2\sqrt{10}}{3})$, $F(1, -\frac{2\sqrt{10}}{3})$, 此时 $|OM| = \frac{\sqrt{10}}{2}$, $|ON| = \sqrt{10}$,

$\frac{|OM|}{|ON|} = \frac{1}{2}$, 因此考虑证明 $\frac{|OM|}{|ON|} - \frac{1}{2} = \frac{y_1(my_2 - 2)}{y_2(my_1 + 4)} - \frac{1}{2} = 0$.



(第 12 题答题图)

13. 如图, $\triangle ABC$ 的内切圆 I 与三边分别相切于点 D, E, F , 连接 AD 与内切圆 I 的另一个交点为 P , 过点 P 分别作 AC, AB 的平行线, 与圆 I 的另一个交点分别为 R, Q , $\triangle DPQ$ 和 $\triangle DPR$ 的内心分别为 I_1 和 I_2 , 求证: $I_1 I_2 \parallel EF$.



(第 13 题图)

【证明】 如图, 连接 IF , 由 $IF \perp AB$, $PQ \parallel AB$, 知 $IF \perp PQ$,

所以, F 是圆 I 中 $\widehat{PQ}$ 的中点, DF 平分 $\angle PDQ$.

所以, D, I_1, F 三点共线. 5 分

同理, D, I_2, E 三点共线.

连接 DF, DE, PF, PE .

因为, $\angle AFP = \angle ADF$,

所以, $\triangle AFP \sim \triangle ADF$.

所以, $\frac{FP}{DF} = \frac{AP}{AF}$ 10 分

同理可得, $\frac{EP}{DE} = \frac{AP}{AE}$.

又 $AE = AF$, 因此由上面可得, $\frac{FP}{DF} = \frac{EP}{DE}$.

..... 15 分

因为, $\angle I_1 DP = \angle FDQ = \angle FPQ$, $\angle I_1 PD = \angle I_1 PQ$,

所以, $\angle FI_1 P = \angle I_1 DP + \angle I_1 PD = \angle FPQ + \angle I_1 PQ = \angle FPI_1$.

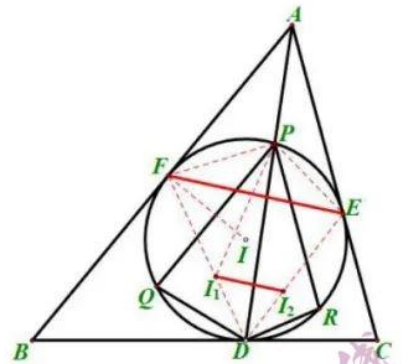
因此, $FP = FI_1$.

同理, $EP = EI_2$.

结合 $\frac{FP}{DF} = \frac{EP}{DE}$, 得 $\frac{FI_1}{FD} = \frac{EI_2}{ED}$.

所以, $I_1 I_2 \parallel EF$ 20 分

注: 也可以由 I_1 是 $\triangle DPQ$ 的内心, 且 F 是 DI_1 与 $\triangle DPQ$ 外接圆 I 的交点, 以及“鸡爪定理”得 $FP = FI_1$.



(第 13 题答题图)

14. 已知 $f(x) = e^x - x^a$, $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$.

(1) 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的最大值;

(2) 若 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点, 且 $x_1 > x_2$, 求证: $x_1 + x_2 > 2a$.

【解答】 (1) $x > 0$ 时, $f(x) = e^x - x^a \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x^a \Leftrightarrow x \geq a \ln x \Leftrightarrow x - a \ln x \geq 0$.

设 $g(x) = x - a \ln x$, 则 $f(x) \geq 0$ 恒成立 $\Leftrightarrow g(x) \geq 0$ 恒成立. 5 分

易知 $a = 0$ 符合要求, 下面考虑 $a > 0$ 的情形.

由 $g'(x) = 1 - \frac{a}{x} = \frac{x-a}{x}$, 得 $0 < x < a$ 时, $g'(x) < 0$; $x > a$ 时, $g'(x) > 0$.

因此, $g(x)$ 在区间 $(0, a)$ 上为减函数, 在 $(a, +\infty)$ 上为增函数, $g(x)$ 的最小值为 $g(a) = a - a \ln a$.

由 $g(a) = a - a \ln a \geq 0$, 得 $\ln a \leq 1$, $0 < a \leq e$.

所以, a 的最大值为 e 10 分

(2) 解法一:

由 (1) 知, x_1, x_2 是 $g(x)$ 的两个零点, 结合 $g(x)$ 的单调性可知, $0 < x_2 < a < x_1$.

若 $x_1 \geq 2a$, 则 $x_1 + x_2 > 2a$ 显然成立.

若 $a < x_1 < 2a$, 设 $h(x) = g(2a-x) - g(x)$ ($a < x < 2a$).

则 $h(x) = (2a-x) - a \ln(2a-x) - x + a \ln x$, $h'(x) = -2 + \frac{a}{2a-x} + \frac{a}{x} = \frac{2(x-a)^2}{x(2a-x)} > 0$.

所以, $h(x)$ 在区间 $(a, 2a)$ 上为增函数, $a < x < 2a$ 时, $h(x) > h(a) = 0$.

..... 15 分

因此, $h(x_1) = g(2a-x_1) - g(x_1) > 0$, $g(2a-x_1) > g(x_1) = g(x_2) = 0$.

又 $0 < 2a-x_1 < a$, $0 < x_2 < a$, 且 $g(x)$ 在区间 $(0, a)$ 上为减函数,

所以, $2a-x_1 < x_2$, $x_1 + x_2 > 2a$.

综上, $x_1 + x_2 > 2a$.

..... 20 分

解法二:

由 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点得, x_1, x_2 是 $g(x)$ 的两个零点, $x_1 - a \ln x_1 = 0, x_2 - a \ln x_2 = 0$.

$$\text{所以, } a = \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2}.$$

$$\ln x_1 + \ln x_2 = \frac{1}{a}(x_1 + x_2) = \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} \cdot (x_1 + x_2) = \frac{(\frac{x_1}{x_2} + 1) \ln \frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2} - 1}.$$

$$\text{设 } \frac{x_1}{x_2} = t, \text{ 则由 } x_1 > x_2 > 0, \text{ 得 } t > 1, \ln x_1 + \ln x_2 = \frac{(t+1) \ln t}{t-1}.$$

$$\text{设 } h(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1},$$

$$\text{则 } h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{2(t+1) - 2(t-1)}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0, \quad h(t) \text{ 在区间 } (1, +\infty) \text{ 上为增函数.}$$

$$\text{因此, } t > 1 \text{ 时, } h(t) > h(1) = 0, \quad \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}, \text{ 进而 } \frac{(t+1) \ln t}{t-1} > 2.$$

$$\text{所以, } \ln x_1 + \ln x_2 = \frac{(t+1) \ln t}{t-1} > 2.$$

$$\text{因此, } x_1 x_2 > e^2. \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

$$\text{所以, } e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2} = x_1^a \cdot x_2^a = (x_1 x_2)^a > (e^2)^a = e^{2a}.$$

$$\text{所以, } x_1 + x_2 > 2a. \quad \dots\dots\dots 20 \text{ 分}$$

15. 设数列 $\{a_n\}$ 是正整数数列, 满足: $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + (n+1, a_n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

(1) 证明: 当 $a = 3$ 时, 存在唯一一个正整数 k , 使得 $a_k = 2k$;

(2) 若 $a > 3$, 试探究满足 $a_k = 2k$ 的正整数 k 的存在性及其个数, 并证明你的结论.

注: 这里 (x, y) 表示正整数 x, y 的最大公约数.

【证明】(1) 当 $a = 3$ 时, 由 $a_1 = 3$, 知 $a_2 = a_1 + (2, a_1) = 3 + (2, 3) = 4$,

$a_3 = a_2 + (3, a_2) = 4 + (3, 4) = 5$.

若 $a_k = k + 2 (k \geq 3)$, 则 $a_{k+1} = a_k + (k+1, a_k) = k + 2 + (k+1, k+2) = k + 3$.

所以, 当 $k = 2, 3, 4, \dots$ 时总有 $a_k = k + 2$.

又当 $k \geq 3$ 时, $2k > k + 2 = a_k$,

所以, 只有 $k = 2$, 满足 $a_k = 2k$.

所以, 当 $a = 3$ 时, 存在唯一一个正整数 $k = 2$, 使得 $a_k = 2k$ 5 分

(2) 当 $a > 3$ 时, $a_1 \geq 4$.

若 $a_1 = 4$, 则 $a_2 = a_1 + (2, a_1) = 4 + (2, 4) = 4 + 2 = 6$.

若 $a_1 \geq 5$, 则 $a_2 = a_1 + (2, a_1) \geq 5 + (2, a_1) \geq 6$.

所以, 若存在正整数 k , 使得 $a_k = 2k$, 则 $k \geq 3$.

我们断言当 $a > 3$ 时, 不存在正整数 k , 使得 $a_k = 2k$ 10 分

反证法: 假设存在正整数 k , 使得 $a_k = 2k$, 记 $m = \min \{k \mid a_k = 2k, k \in \mathbb{N}^+\}$, 则 $m \geq 3$.

以下先证明一个引理: 当 $1 \leq n \leq m-1$ 时, 总有 $a_n > 2n$.

由前面讨论可知, $a_1 > 2$, $a_2 > 4$,

若 $a_{n-1} > 2(n-1)$ ($2 \leq n < m-1$), 则 $a_n = a_{n-1} + (n, a_{n-1}) > 2(n-1) + 1 = 2n-1$,

因此, $a_n \geq 2n$. 结合 m 的最小性, 可知 $a_n \neq 2n$, 因此, $a_n > 2n$.

归纳可知当 $1 \leq n \leq m-1$ 时, 总有 $a_n > 2n$ 15 分

下面推出矛盾:

易见 $\{a_n\}$ 为严格单调递增的正整数数列, 因为 $a_m = 2m$, 所以, $a_{m-1} \leq 2m-1$.

又由引理知 $a_{m-1} > 2(m-1)$, 故 $a_{m-1} = 2m-1$.

注意到 $m \geq 3$, 则可类似地由单调性和引理可得 $a_{m-2} = 2m-3$ 或 $a_{m-2} = 2m-2$.

若 $a_{m-2} = 2m-3$, 则

$a_{m-1} = a_{m-2} + (m-1, a_{m-2}) = 2m-3 + (m-1, 2m-3) = 2m-3 + (m-1, m-2) = 2m-3+1 = 2m-2$

与 $a_{m-1} = 2m-1$ 矛盾!

若 $a_{m-2} = 2m-2$, 则

$a_{m-1} = a_{m-2} + (m-1, a_{m-2}) = 2m-2 + (m-1, 2m-2) = 2m-2 + m-1 = 3m-3 > 2m-1$ (因为 $m \geq 3$), 与 $a_{m-1} = 2m-1$ 矛盾!

因此, 当 $a > 3$ 时, 不存在正整数 k , 使得 $a_k = 2k$ 20 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。

总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》