# 2023 届高三第六次联考·数学试卷

## 参 考 答 案

1.B　因为 $A=\{x|x^2-2x-3\geqslant 0\}$，所以 $A=(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$，因为 $B=\{x|\frac{4}{x+1}\leqslant 1\}$，所以 $A=(-\infty,-1)\cup[3,+\infty)$，所以 $B\subseteq A$. 来源：高三答案公众号

2.D　因为 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_9$ 的方差为 4，所以 $3x_1-1,3x_2-1,3x_3-1,\cdots,3x_9-1$ 的方差为 36.

3.D　先将 5 个空位排好，再从 6 个空隙中排 4 名学生，则共有 $A_6^4=360$ 种.

4.C　令 $x=1$，则 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8=3^8-1$，令 $x=-1$，则 $a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_8=1-3^8$，所以 $a_0+a_2+a_4+a_6+a_8=0$.

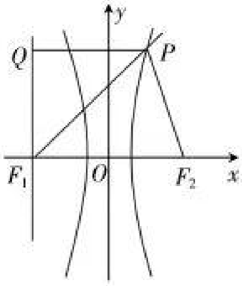
5.B　由题图易知 $A=3$，$\frac{3}{4}T=\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{12}$，$T=\pi$，则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，将 $(\frac{\pi}{3},3)$ 代入得 $\sin(\frac{2\pi}{3}+\varphi)=1$，且 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，故 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，因此 $f(x)=3\sin(2x-\frac{\pi}{6})$. 令 $2x-\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，所以函数 $f(x)$ 图象的对称中心为 $(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},0),k\in\mathbf{Z}$，A 项不正确；令 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，所以函数 $f(x)$ 图象的对称轴为 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，B 项正确；令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，故函数 $f(x)$ 在 $(\pi,\frac{4\pi}{3})$ 上单调递增，在 $(\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3})$ 上单调递减，C 项不正确；将函数 $y=3\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度可以得到函数 $y=3\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图象，D 项不正确.

6.D　设 $A_1$ 表示"小华在周六早餐后看书"，$A_2$ 表示"小华在周六早餐后画画"，$A_3$ 表示"小华在周日早餐后看书"，$A_4$ 表示"小华在周日早餐后画画"，则 $P(A_1)=\frac{1}{2}$，$P(A_2)=\frac{1}{2}$.

由题意知 $P(A_3|A_1)=\frac{1}{4}$，$P(A_3|A_2)=\frac{2}{5}$，

所以 $P(A_3)=P(A_1)P(A_3|A_1)+P(A_2)P(A_3|A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{13}{40}$.

7.C　如图，过点 $P$ 作 $PQ\perp$ 直线 $x=-c$，垂足为 $Q$，连接 $PF_2$，则 $|PF_2|=|PQ|$. 由 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $6c-2a$，知 $|PF_1|=2c$，$|F_1F_2|=2c$，$|PF_2|=2c-2a$，则 $|PQ|=2c-2a$，所以 $\cos\angle F_1PQ=\frac{2c-2a}{2c}=\frac{c-a}{c}$. 在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理知 $\cos\angle PF_1F_2=\frac{4c^2+4c^2-(2c-2a)^2}{2\times 2c\times 2c}=$



$\frac{c^2-a^2+2ac}{2c^2}$，因为$\cos\angle PF_1F_2=\cos\angle F_1PQ$，所以$\frac{c^2-a^2+2ac}{2c^2}=\frac{c-a}{c}$，解得 $e=2+\sqrt{3}$.

8. A　因为 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$，来源：高三答案公众号

$P(C)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+A_3^3\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{27}$，$P(AB)=\frac{1}{9}$，$P(AC)=\frac{1}{9}$，$P(BC)=\frac{1}{9}$，

所以 $P(AB)=P(A)P(B)$，$P(AC)\neq P(A)P(C)$，$P(BC)\neq P(B)P(C)$，所以事件 $A$，$B$ 相互独立.

9. AD　由题意知 $2a+6a+8a+10a+12a+8a+4a=1$，则 $50a=1$，即 $a=0.02$；

$\bar{x}=20\times0.04+22\times0.12+24\times0.16+26\times0.2+28\times0.24+30\times0.16+32\times0.08=26.56$(吨)；

因为后三组的频率为 $2\times0.04+2\times0.08+2\times0.12=0.48\neq0.5$，所以中位数不可能为 27 吨；

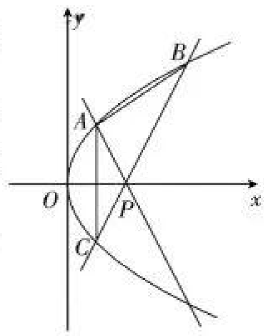
“超标”社区的频率为 $(31-30)\times0.08+0.08=0.16$，所以 $750\times0.16=120$，即可估计全市共有 120 个“超标”社区.

10. ABD　由分布列可知 $a+b=\frac{1}{2}$，则 $2a+2b=1(a\neq b)$，且 $0<a<\frac{1}{2}$，$0<b<\frac{1}{2}$，

所以 $E(X)=1+a+3b=\frac{3}{2}+2b$，$E(Y)=1+b+3a=\frac{3}{2}+2a$，所以 $E(X)+E(Y)=3+2a+2b=4$，A 项正确；$E(X)-E(Y)=2b-2a=4b-1$，则 $-1<E(X)-E(Y)<1$，且 $E(X)-E(Y)\neq0$，B 项正确；$E(X)\cdot E(Y)=(\frac{3}{2}+2a)(\frac{3}{2}+2b)=\frac{15}{4}+2a-4a^2$，则 $\frac{15}{4}<E(X)\cdot E(Y)<4$，C 项错误；$\frac{E(X)}{E(Y)}=\frac{\frac{3}{2}+2b}{\frac{3}{2}+2a}=\frac{8}{3+4a}-1$，则 $\frac{3}{5}<\frac{E(X)}{E(Y)}<\frac{5}{3}$，且 $\frac{E(X)}{E(Y)}\neq1$，D 项正确.

11. ACD　由已知可得 $AD=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$，$AE=\frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$，$AF=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$，又 $AD\geqslant AE$，所以$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{2ab}{a+b}$，由 $AD\geqslant AF$ 可得 $a^2+b^2\geqslant2ab$，由 $AE\geqslant AF$ 可得$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}$.

12. BD　因为点 $P$ 为椭圆 $M$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-4}=1(a>2)$的右焦点，所以点 $P$ 的坐标为(2,0)，如图，记点 $A$ 关于 $x$ 轴的对称点为 $C$，因为 $A(x_1,y_1)$，所以 $C(x_1,-y_1)$，设直线 $BC$ 的方程为 $y=k(x-2)$，由$\begin{cases}y=k(x-2)\\y^2=2px\end{cases}$消去 $y$ 得到 $k^2x^2-(4k^2+2p)x+4k^2=0$，所以 $x_1x_2=4$，$x_1+x_2=4+\frac{2p}{k^2}$，




所以 $y_1^2y_2^2=4p^2x_1x_2=16p^2$，则 $y_1y_2=4p$. 若$|PB|=2|PA|$，则 $y_2=2y_1$，

则 $k=\sqrt{2p}$. 因为 $A,B$ 两点在第一象限，则 $y_1>0,y_2>0$，且 $0<x_1<2<x_2$，连接 $AB$，

则 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle ACB}-S_{\triangle ACP}=\frac{1}{2}\cdot 2y_1\cdot(x_2-x_1)-\frac{1}{2}\cdot 2y_1\cdot(2-x_1)=y_1\cdot(x_2-2)$

$=\sqrt{2px_1}\cdot(x_2-2)=\sqrt{2px_1}\cdot x_2-2\sqrt{2px_1}=\sqrt{2px_1x_2}\cdot\sqrt{x_2}-2\sqrt{2px_1}=2\sqrt{2p}\cdot$
$\sqrt{x_2}-2\sqrt{2px_1}=2\sqrt{2p}\cdot(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})$ 来源：高三答案公众号

$=2\sqrt{2p}\cdot\sqrt{x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}}=2\sqrt{2p}\cdot\sqrt{4+\frac{2p}{k^2}-4}=\frac{4p}{k}$.

13. $>$ 因为 $X\sim N(100,\sigma^2)$，所以 $P(75<X<90)>P(115<X<130)$.

14. $-2$ $(x^2+ax-3)^4=[(x^2+ax)-3]^4$，通项公式为 $T_{r+1}=C_4^r\cdot(x^2+ax)^{4-r}\cdot(-3)^r,r=0,1,2,3,4$，对于 $(x^2+ax)^{4-r}$，通项公式为 $T_{k+1}=C_{4-r}^k\cdot x^{2(4-r-k)}(ax)^k=C_{4-r}^k\cdot x^{8-2r-k}a^k$，且满足 $0\leqslant k\leqslant 4-r(k,r\in\mathbf{N})$，令 $8-2r-k=7$，可得 $k=1,r=0$，所以含 $x^7$ 项的系数为 $C_4^0(-3)^0C_4^1\cdot a=-8$，所以 $a=-2$.

15. $\frac{14}{25}$ 分配方法有 $(C_6^2+\frac{C_6^3C_3^3}{A_2^2})\cdot A_2^2=50$ 种，其中 2 名女性工作人员不在同一个社区的分配方法有 $(C_4^1+C_4^2+C_4^3)\times 2=28$ 种，所以概率 $P=\frac{14}{25}$.

16. $20-10\sqrt{3}$ 设 $\angle BCF=\theta$，因为 $AB=2BC=20$，所以 $BC=10$，$\angle CBE=60°$，

在 $\triangle BCF$ 中，由 $\frac{CF}{\sin 60°}=\frac{BC}{\sin(120°-\theta)}=\frac{BF}{\sin\theta}$，

得 $CF=\frac{BC\sin 60°}{\sin(120°-\theta)}=\frac{5\sqrt{3}}{\sin(120°-\theta)}$，在 $\triangle BCE$ 中，由 $\frac{CE}{\sin 60°}=\frac{BC}{\sin(90°-\theta)}=\frac{BE}{\sin(30°+\theta)}$，

得 $CE=\frac{10\sin 60°}{\sin(90°-\theta)}=\frac{5\sqrt{3}}{\cos\theta}$，

所以 $S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}CF\cdot CE\cdot\sin 30°=\frac{75}{4\sin(120°-\theta)\cos\theta}=\frac{75}{2\sin\theta\cos\theta+2\sqrt{3}\cos^2\theta}$

$=\frac{75}{\sin 2\theta+\sqrt{3}\cos 2\theta+\sqrt{3}}=\frac{75}{2\sin(2\theta+60°)+\sqrt{3}}$，所以当且仅当 $2\theta+60°=90°$，

即 $\theta=15°$ 时，$\triangle CEF$ 的面积取最小值，即四边形 $CEDF$ 的面积取最小值.

此时 $\frac{BF}{\sin 15°}=\frac{BC}{\sin 105°}$，$BF=BC\times\frac{\sin 15°}{\sin 105°}=10\tan 15°=20-10\sqrt{3}$.

17. 解：(1) 因为数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项的积为 $T_n=\frac{1}{n+1}$，当 $n=1$ 时，$a_1=T_1=\frac{1}{2}$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=\frac{T_n}{T_{n-1}}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+1}$，所以 $a_n=\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$. ……………………………… 4 分

(2) 令 $b_n=S_{2n}-S_n$，所以 $b_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}$，

所以 $b_{n+1}=a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots+a_{2n}+a_{2n+1}+a_{2n+2}$,

则 $b_{n+1}-b_n=a_{2n+1}+a_{2n+2}-a_{n+1}=1-\dfrac{1}{2n+2}+1-\dfrac{1}{2n+3}-1+\dfrac{1}{n+2}$

$=1+\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{2n+2}-\dfrac{1}{2n+3}=\dfrac{4n^3+18n^2+23n+8}{(n+2)(2n+2)(2n+3)}>0$,

所以 $b_{n+1}>b_n$,则 $S_{2n}-S_n$ 的最小值为 $b_1=a_2=\dfrac{2}{3}$. ………………………………… 10 分

18. 解:(1)

| | 对萌宠类视频感兴趣 | 对萌宠类视频不感兴趣 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 男性用户 | 20 | 30 | 50 |
| 女性用户 | 35 | 15 | 50 |
| 合计 | 55 | 45 | 100 |

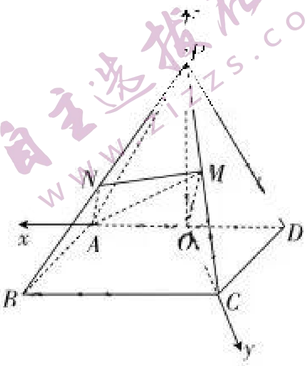
$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{100(20\times15-35\times30)^2}{50\times50\times55\times45}\approx9.091<10.828$,

因此没有 99.9%的把握认为"用户是否对萌宠类视频感兴趣与性别有关". ……………… 6 分

(2)抽取的 6 名用户中有 4 名男性用户,编号为 $a,b,c,d$,2 名女性用户,编号为 $x,y$,从中随机抽 2 人,共有 $ab,ac,ad,ax,ay,bc,bd,bx,by,cd,cx,cy,dx,dy,xy$ 15 种情况,其中抽到 1 名男性和 1 名女性共有 $ax,ay,bx,by,cx,cy,dx,dy$ 8 种情况,所以抽到 1 名男性和 1 名女性的概率 $P=\dfrac{8}{15}$. ……………………………………………………………… 12 分

19. 解:(1)连接 $OC$,$\because PA=PD=DC=2$,$\angle AD$[illegible],

$\therefore\triangle PAD$为正三角形,$O$ 为 $AD$ 的中点,[illegible] $PO$,$AD\perp CO$. 又 $PO\cap CO=O$,$\therefore AD\perp$平面 $POC$,又 $OM\subset$平面 $POC$,$\therefore AD\perp OM$,又 $AD/\!/BC$,$\therefore OM\perp BC$. ……………………………… 4 分




(2)$\because$平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$,由(1)可知平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$,$PO\subset$平面 $PAD$,$\therefore PO\perp$底面 $ABCD$,分别以 $OA,OC,OP$ 为 $x$ 轴,$y$ 轴,$z$ 轴建立空间直角坐标系,根据题意可得 $O(0,0,0)$,

$A(1,0,0)$,$B(2,\sqrt{3},0)$,$C(0,\sqrt{3},0)$,$P(0,0,\sqrt{3})$,又 $PM=\dfrac{1}{3}PC$,$\therefore M(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$,$\therefore\overrightarrow{AM}=(-1,\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$,$\overrightarrow{AB}=(1,\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{AP}=(-1,0,\sqrt{3})$,设平面 $PAB$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=x+\sqrt{3}y=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=-x+\sqrt{3}z=0\end{cases}$,令 $x=\sqrt{3}$,则 $y=-1$,$z=1$,$\therefore\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,1)$. 设直线 $AM$ 与平

面 $PAB$ 所成角为 $\theta$，则 $\sin\theta=|\cos\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{AM}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AM}|}=\dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{5}\times\sqrt{\frac{8}{3}}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，∴直线 $AM$ 与平面 $PAB$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. ………………………………………… 12 分

20. 解：(1)因为 $\sum\limits_{i=1}^{5}y_i=140$，所以 $\overline{y'}=\dfrac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5}y_i=28$，则 $\overline{x'}=\dfrac{\overline{y'}-m}{4}$，

由两组数据(6,28)和(0,28)，得 $\bar{y}=\dfrac{1}{7}\times(140+56)=28$，

所以 $\bar{x}=\dfrac{1}{10}(7\bar{y}-166)=3$，所以 $\overline{x'}=\dfrac{(7\bar{x}-6-0)}{5}=3$，则 $3=\dfrac{28-m}{4}$，解得 $m=16$. …… 4 分

(2)因为 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i+6\times28+0\times28-7\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2+6\times6+0\times0-7\bar{x}^2}=\dfrac{10}{7}$，所以 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-420}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-27}=\dfrac{10}{7}$，

因为 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x'}\,\overline{y'}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x'}^2}=4$，所以 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-420}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-45}=4$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=55$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=460$. ………… 8 分

(3)同学甲所得的线性回归方程为 $y=\dfrac{10}{7}x+\dfrac{166}{7}$，若 $x=10$，则 $y=\dfrac{266}{7}\approx38$，

同学乙所得的线性回归方程为 $y=4x+16$，若 $x=10$，则 $y=56$，所以同学乙所求得的回归方程更适合作为变量 $y$ 与 $x$ 的回归方程. ………………………………………… 12 分

21. 解：(1)$A,B,C$ 3 个问题至多一个没答对直接被认定为“成功”的概率

$P_1=C_3^3p^3+C_3^2p^2(1-p)=3p^2-2p^3$，通过复活赛被认定为“成功”的概率

$P_2=(1-P_1)p^2=(2p^3-3p^2+1)p^2=2p^5-3p^4+p^2$，所以选手被认定为“成功”的概率

$P=P_1+P_2=3p^2-2p^3+2p^5-3p^4+p^2=2p^5-3p^4-2p^3+4p^2$. ……………………… 4 分

(2)设选手获得的奖品的价值为 $X$，则 $X$ 的所有可能取值为 0，400，500.

$P(X=0)=(2p^3-3p^2+1)(1-p^2)=\dfrac{3}{8}$，$P(X=400)=2p^5-3p^4+p^2=\dfrac{1}{8}$，

$P(X=500)=3p^2-2p^3=\dfrac{1}{2}$，所以 $X$ 的分布列为来源：高三答案公众号

| $X$ | 0 | 400 | 500 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{2}$ |

所以 $E(X)=400\times\dfrac{1}{8}+500\times\dfrac{1}{2}=300$，因为 $300E(X)=90000>80000$，所以奖品发放方案会超过预算. ………………………………………… 12 分

22. 解：(1)求函数 $f(x)$ 的零点个数即求方程 $f(x)=0$ 的根的个数，又因为 $f(x)=0$ 等价于

$\cos x-1+x\sin x=0(x\neq0)$，令 $g(x)=\cos x-1+x\sin x,x\in(0,\pi)$，

则 $g'(x)=x\cos x$，当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$g'(x)>0$，当 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$上单调递增，在$(\frac{\pi}{2},\pi)$上单调递减. 又 $g(0)=0,g(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-1>0,g(\pi)=-2<0$，可知 $g(x)$在$(0,\pi)$上有 1 个零点，所以 $f(x)$在$(0,\pi)$上有 1 个零点. ………………………… 4 分

(2) $f(x)-ax<0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立等价于 $\cos x-1+x\sin x-ax^2<0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立，令 $h(x)=\cos x-1+x\sin x-ax^2,x\in(0,+\infty)$，则 $h'(x)=x(\cos x-2a)$，

当 $2a\geqslant1$，即 $a\geqslant\frac{1}{2}$时，$h'(x)=x(\cos x-2a)\leqslant0$，故 $h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，$h(x)<h(0)=0$，符合题意.

当 $2a<1$，即 $a<\frac{1}{2}$时，因为 $\varphi(x)=\cos x-2a$ 在$(0,\pi)$上单调递减，且 $\varphi(0)=1-2a>0$，故存在 $x_0\in(0,\pi)$，使得 $\varphi(x_0)=\cos x_0-2a>0$，故当 $x\in(0,x_0)$时，$h'(x)=x(\cos x-2a)>0$，故 $h(x)$在区间$(0,x_0)$上单调递增，$h(x)>h(0)=0$，不符合题意.

综上可得实数 $a$ 的取值范围为$[\frac{1}{2},+\infty)$. ………………………………………… 12 分

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。