机密★启用前(全国卷理科数学)

华大新高考联盟2022届高三1月教学质量测评

理科数学

命题：

本试题卷共4页，共23题(含选考题)。满分150分，考试用时120分钟

★ 祝考试顺利 ★

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的学校、班级、姓名、准考证号填写在答题卷指定位置，认真核对与准考证号条形码上的信息是否一致，并将准考证号条形码粘贴在答题卷上的指定位置。

2. 选择题的作答：选出答案后，用2B铅笔把答题卷上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。答在试题卷上无效。

3. 非选择题的作答：用黑色墨水的签字笔直接答在答题卷上的每题所对应的答题区域内。答在试题卷上或答题卷指定区域外无效。

4. 考试结束，监考人员将答题卷收回，考生自己保管好试题卷，评讲时带来。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x(2x-9)>0\}$，$B=\{x|x>1\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=$

A. $\left\{x\middle|x>\frac{9}{2}\right\}$　　B. $\left\{x\middle|x\geqslant\frac{9}{2}\right\}$　　C. $\left\{x\middle|1<x\leqslant\frac{9}{2}\right\}$　　D. $\left\{x\middle|1<x<\frac{9}{2}\right\}$

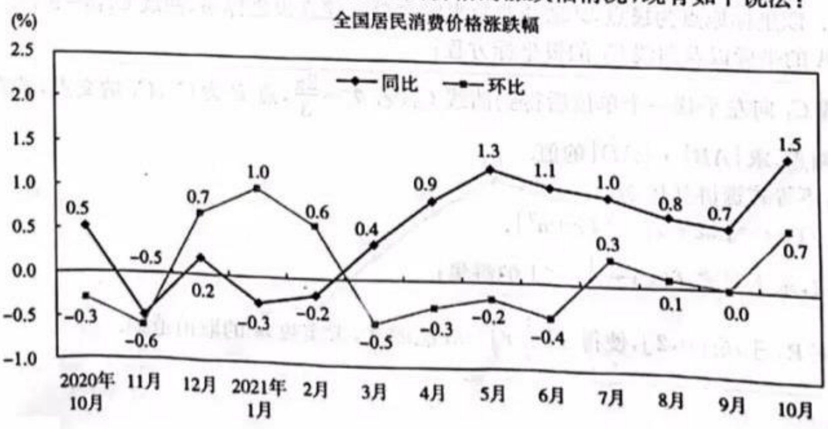
2. 已知公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$；根据此公式，$i\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}=$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$　　D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

3. 已知命题 p：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+6x=-10$，命题 q：$\forall x\in\mathbf{R}$，$\sin 2x+\cos 2x<\frac{3}{2}$，则下列命题中为真命题的是

A. $p\wedge q$　　B. $p\vee\neg q$　　C. $\neg p\wedge\neg q$　　D. $\neg p\wedge q$

4. 下图是国家统计局2021年11月发布的全国居民消费价格的涨跌幅情况，现有如下说法：



第4题图

①2021 年 10 月份，全国居民消费价格的同比和环比均呈现增涨趋势；

②2020 年 10 月至 2021 年 10 月，全国居民消费价格同比增涨的月份个数是下跌的 5 倍；

③从 2020 年 10 月至 2021 年 10 月中任取 2 个月，全国居民消费价格的同比均呈现增涨的概率为 $\frac{15}{26}$；

则上述说法正确的个数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5. 研究显示，某地区实施人工降雨以后降水量超过 200 mm 的概率为 $\frac{2}{3}$. 现在由于干旱，要对该地区连续 4 天使用人工降雨，则在这 4 天中至少有 2 天降水量超过 200 mm 的概率为

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{8}{9}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{16}{27}$

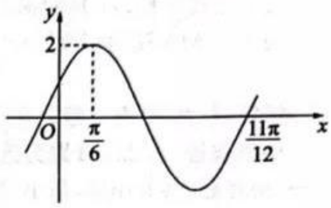
6. 已知实数 a,b,c 满足 $1.5^a=3.1$，$5^b=0.1$，$c=\frac{\log_4 16}{\log_2 e^2}$，则

A. $c>a>b$　　B. $a>c>b$　　C. $b>a>c$　　D. $c>b>a$

7. 已知函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)\left(\text{其中 } A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示；将函数 $f(x)$ 图象的横坐标伸长到原来的 6 倍后，再向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图象，则函数 $g(x)$ 在(　　)上单调递减.

A. $[-6\pi,-5\pi]$　　B. $[2\pi,4\pi]$

C. $[4\pi,6\pi]$　　D. $[-4\pi,-3\pi]$

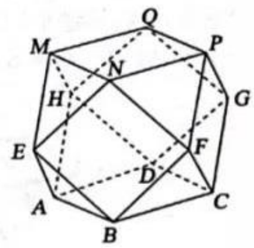


第 7 题图

8. 半正多面体(semiregular solid)亦称“阿基米德多面体”，是由边数不全相同的正多边形围成的多面体，体现了数学的对称美. 二十四等边体就是一种半正多面体，是由正方体切截而成的，它由八个正三角形和六个正方形构成(如图所示)，则二十四等边体的体积与其外接球体积之比为

A. $\frac{4\sqrt{2}}{5\pi}$　　B. $\frac{4\sqrt{2}}{8\pi}$

C. $\frac{5\sqrt{2}}{4\pi}$　　D. $\frac{2\sqrt{2}}{5\pi}$



第 8 题图

9. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右顶点为 A，$\overrightarrow{OB}=5\overrightarrow{OA}$，若在双曲线 C 的渐近线上存在点 M，使得 $\angle AMB=90°$，则双曲线 C 的离心率的取值范围为

A. $\left[\frac{3\sqrt{5}}{5},+\infty\right)$　　B. $\left(1,\frac{3\sqrt{5}}{5}\right]$　　C. $[\sqrt{5},+\infty)$　　D. $(1,\sqrt{5}]$

10. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$2AA_1=3AB=12$，点 M 是线段 BB_1 的中点，点 N 是线段 DD_1 上靠近 D 的三等分点，若正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 被过点 A_1,M,N 的平面所截，则所得截面的周长为

A. $10+8\sqrt{2}$　　B. $10+7\sqrt{2}$　　C. $9+8\sqrt{2}$　　D. $9+7\sqrt{2}$

11. 我们可以将正整数 18 分解成两个正整数的乘积，共有 1×18，2×9，3×6 这三种形式，其中 3×6 是这三种分解中两数差的绝对值最小的一种，称 3×6 为 18 的最佳分解；当 $p\times q(p,q\in\mathbf{N}^*)$ 是正整数 n 的最佳分解时，我们定义函数 $f*(n)=|p-q|$，例如 $f*(18)=|6-3|=3$，$f*(6)=|2-3|=1$；基于上述事实，下列说法错误的是

A. $f*(20)>f*(16)$　　B. 若 $f*(n)=3$，则 n 的值可以是 154

C. $\sum_{i=1}^{n}f*(4^i)=0$　　D. $\sum_{i=1}^{10}f*(2i-1)=82$

12. 已知 $2021\ln a=a+m$，$2021\ln b=b+m$，其中 $a\neq b$，若 $ab<\lambda$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围为

A. $\left[\left(\frac{2021}{e}\right)^2,+\infty\right)$　　B. $[2023^2,+\infty)$

C. $[2021^2,+\infty)$　　D. $[(2021e)^2,+\infty)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,3)$，$\boldsymbol{b}=(3,-1)$，$\boldsymbol{c}=(2,\lambda)$，若 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$，则 $\lambda=$________.

14. $(2\sqrt[4]{x^3}-x)^7$ 的展开式中 x^6 的系数为________.

15. 已知在△ABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $a=4$，$\frac{a\cos C+c\cos A}{\cos C}+\sqrt{2}b=0$，$b\sin\left(A+\frac{3\pi}{2}\right)-a\cos(B+\pi)=\frac{b^2}{c}$，则 $C=$________，△ABC 的面积为________.

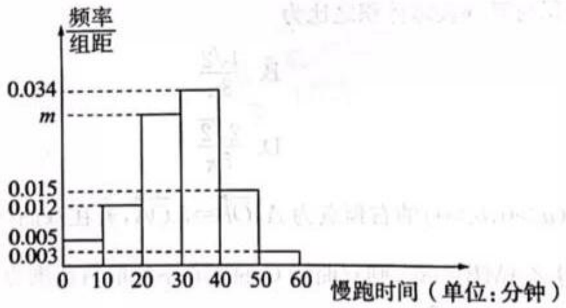
16. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点分别为 M,N，右焦点为 F，点 P,Q 在椭圆 C 上，P,Q 异于 M,N，且关于原点对称，点 P 的纵坐标大于点 Q 的纵坐标；若点 $A(0,y_A)$，$B(0,y_B)$ 分别在直线 MP，MQ 上，记四边形 $MAFB$ 的面积为 S，若 $S\geqslant\lambda$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答；第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 5 小题，每小题 12 分，共 60 分。

17. (12 分)

研究显示，越来越多的"996"上班族下班后通过慢跑强身健体，慢跑属于一种有氧运动，可以消耗人体大量热量，坚持慢跑可以促进新陈代谢，增加肺活量以及增强心脏功能，提升人体免疫力，因此深受青年人喜爱. 下图统计了小明这 100 天每天慢跑的时间情况(单位：分钟).



第 17 题图

(1)求 m 的值.

(2)下表是小明的同事小强本月前 7 次慢跑的时间情况；由散点图可知，小强的慢跑次数 x 和慢跑时间 y(单位：分钟)之间线性相关，

①求 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中 $\hat{b}$、$\hat{a}$ 使用分数形式表示；

②根据①中的运算结果预测小强第 9 次的慢跑时间是否会超过小明这 100 天慢跑的平均时间.

次数 x	1	2	3	4	5	6	7
慢跑时间 y(单位：分钟)	15	18	27	23	20	29	36

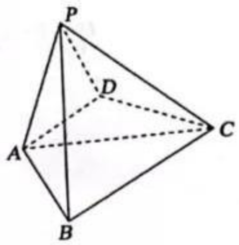
参考公式：在线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中，$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

18.(12 分)

如图所示,在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,$\triangle PAD$ 是面积为$\sqrt{3}$的等边三角形,$AD/\!/BC$,$AB=AD=CD=\frac{1}{2}BC$,二面角 $P\text{-}AD\text{-}B$ 为直二面角.

(1)若平面 $PAB\cap$平面 $PCD=l$,求证:$l\perp AD$;

(2)若点 E 为线段 AC 上靠近 A 的三等分点,求直线 PE 与平面 PBC 所成角的余弦值.



第 18 题图

19.(12 分)

已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $S_5=25,a_2+a_5+a_{10}=31$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式以及前 n 项和 S_n;

(2)若 $b_n=\begin{cases}2^{a_n},n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{1}{a_na_{n+2}},n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 求数列$\{b_n\}$的前 $2n-1$ 项和 T_{2n-1}.

20.(12 分)

已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$的焦点为 F,过点$(m,0)$且斜率为 k 的直线 l 与抛物线 C 交于 A,B 两点.

(1)当 $k=2$ 且 $p=2m$ 时,$|AB|=15$,求抛物线 C 的方程;

(2)已知横坐标为$-\frac{p}{2}$的点 D 在直线 l 上,若对任意正数 m,$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=|FD|^2\cdot\cos\angle AFB$ 恒成立,求 k 的值.

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=e^x+\frac{1}{2}x^2+ax$.

(1)若 $a=-1$,求函数 $f(x)$的单调区间;

(2)若 $a\in[0,1]$,求证:$32f(x)>-7$.

参考数据:$\ln3\approx1.099,\ln4\approx1.386$.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分。

22.[选修 4-4:坐标系与参数方程](10 分)

已知在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=1+\cos\alpha,\\ y=\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数),曲线 C_1 与 x 轴的正半轴交于点 A. 以坐标原点为极点,x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系,曲线 $C_2:\theta=\theta_0(\rho>0)$.

(1)求点 A 的坐标以及曲线 C_1 的极坐标方程;

(2)将曲线 C_1 向左平移一个单位后得到曲线 C_3,若 $\theta_0=\frac{2\pi}{3}$,点 B 为 C_2,C_3 的交点,若直线 AB 与曲线 C_3 交于 B,D 两点,求$|AB|\cdot|AD|$的值.

23.[选修 4-5:不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|4x+a|-|4x+a^2|$.

(1)若 $a=2$,求不等式 $f(x)+\frac{1}{2}x<1$ 的解集;

(2)若 $\exists x\in\mathbf{R},\exists a\in[0,2]$,使得 $f\left(\frac{1}{2}x\right)>m$ 能成立,求实数 m 的取值范围.

机密★启用前(全国卷理科数学)

华大新高考联盟2022届高三1月教学质量测评

理科数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】C

【命题意图】本题考查集合的运算、一元二次不等式的解法,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$A=\{x|x(2x-9)>0\}=\left\{x\middle|x<0\text{ 或 }x>\frac{9}{2}\right\}$,故 $\complement_U A=\left\{x\middle|0\leqslant x\leqslant\frac{9}{2}\right\}$,则 $(\complement_U A)\cap B=\left\{x\middle|1<x\leqslant\frac{9}{2}\right\}$,故选C.

2.【答案】B

【命题意图】本题考查复数的运算、复数的概念,考查数学运算、数学建模、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$\mathrm{i}\cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}=\mathrm{i}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{i}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$,故选B.

3.【答案】D

【命题意图】本题考查全称命题与特称命题、复合命题的真假判定,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】方程 $x^2+6x+10=0$ 的 $\Delta=36-4\times10=-4<0$,故 $x^2+6x+10=0$ 无解,则命题 p 为假;而 $\sin2x+\cos2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}<\frac{3}{2}$,故命题 q 为真;故命题 $p\wedge q$、$p\vee\neg q$、$\neg p\wedge\neg q$ 均为假命题,$\neg p\wedge q$ 为真命题,故选D.

4.【答案】C

【命题意图】本题考查统计图表、古典概型的概率,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】2021年10月份,全国居民消费价格的同比和环比的涨幅均为正数,故①正确;2020年10月至2021年10月,全国居民消费价格同比增涨的月份有10个,下跌的月份有3个,故②错误;从2020年10月至2021年10月的中任取2个月,全国居民消费价格的同比均呈现增涨的概率 $P=\frac{C_{10}^2}{C_{13}^2}=\frac{10\times9}{13\times12}=\frac{15}{26}$,故③正确;故选C.

5.【答案】B

【命题意图】本题考查相互独立事件的概率,考查数学建模、数学运算的核心素养.

【解析】依题意,所求概率为 $1-\left(\frac{1}{3}\right)^4-C_4^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{72}{81}=\frac{8}{9}$,故选B.

6.【答案】B

【命题意图】本题考查指对数的大小比较,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$a=\log_{1.5}3.1\in(1,+\infty)$,$b=\log_5 0.1\in(-\infty,0)$,$c=\frac{\log_4 16}{\log_2 \mathrm{e}^2}=\frac{2}{\log_2 \mathrm{e}^2}=\ln 2\in(0,1)$,故 $a>c>b$,故选B.

7.【答案】D

【命题意图】本题考查三角函数的图象与性质,考查数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$A=2$,$\frac{3T}{4}=\frac{11\pi}{12}-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}$,则 $T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$,则 $\omega=2$,故 $f(x)=2\cos(2x+\varphi)$;而 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$,

故$\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,则$\varphi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,由$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,则$\varphi=-\frac{\pi}{3}$,$f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$;将函数$f(x)$图象的横坐标伸长到原来的6倍后,得到$y=2\cos\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{3}\right)$,再向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位后,得到$g(x)=2\cos\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{4}\right)$,故函数$g(x)$在$[-6\pi,-5\pi]$上先增后减,在$[2\pi,4\pi]$上先减后增,在$[4\pi,6\pi]$上单调递增,在$[-4\pi,-3\pi]$上单调递减,故选D.

8.【答案】C

【命题意图】本题考查空间几何体的表面积与体积,考查数学抽象、直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】设$MN=2a$,则二十四等边体的外接球半径为$2a$,其外接球体积为$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times(2a)^3=\frac{32}{3}\pi a^3$,二十四等边体可以看成一个长方体加上四个四棱锥拼接而成的几何体,故所求体积$V=2a\times2a\times2\sqrt{2}a+\frac{4}{3}\times a\times2a\times2\sqrt{2}a=\frac{40\sqrt{2}}{3}a^3$,故二十四等边体的体积与其外接球体积之比为$\frac{5\sqrt{2}}{4\pi}$,故选C.

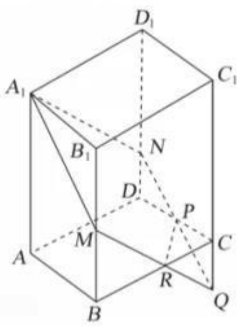
9.【答案】B

【命题意图】本题考查双曲线的方程与性质,考查直观想象、数学运算的核心素养.

【解析】依题意,$A(a,0)$,$B(5a,0)$,则以AB为直径的圆D:$(x-3a)^2+y^2=4a^2$;而$\angle AMB=90^\circ$,故双曲线C的渐近线与圆D有交点,故圆心$D(3a,0)$到直线$bx-ay=0$的距离$d=\frac{3ab}{c}\leqslant2a$,则$3b\leqslant2c$,故$9c^2-9a^2\leqslant4c^2$,故$5c^2\leqslant9a^2$,则$1<e=\frac{c}{a}\leqslant\frac{3\sqrt{5}}{5}$,故双曲线$C$的离心率的取值范围为$\left(1,\frac{3\sqrt{5}}{5}\right]$,故选B.

10.【答案】B

【命题意图】本题考查空间几何体的结构特征,考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.



【解析】作出图形如图所示. 延长C_1C至Q,使得$CQ=1$,连接MQ,NQ,则四边形A_1MQN为平行四边形;记MQ与BC交于点R,NQ与CD交于点P,则$A_1N=4\sqrt{2}$,$A_1M=5$,$MR=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$,$NP=\sqrt{2^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{10}{3}$,$PR=\sqrt{1^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{5}{3}$,故所得截面的周长为$10+7\sqrt{2}$,故选B.

11.【答案】D

【命题意图】本题考查数学的实际应用,考查数学抽象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$f*(20)=1$,$f*(16)=0$,故A正确;因为$154=2\times7\times11$,故$154=1\times154$,$154=2\times77$,$154=7\times22$,$154=11\times14$,观察可知,B正确;因为$4^i=2^{2i}=2^i\cdot2^i$,$i\in\mathbf{N}^*$,故$f*(4^i)=0$,则$\sum_{i=1}^{n}f*(4^i)=0$,故C正确;$\sum_{i=1}^{10}f*(2i-1)=0+2+4+6+0+10+12+2+16+18=70$,故D错误,故选D.

12.【答案】C

【命题意图】本题考查利用导数研究函数的性质,考查数学抽象、直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】令$f(x)=\ln x-\frac{1}{2021}x$,故$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2021}=\frac{2021-x}{2021x}$,故当$x\in(0,2021)$时,$f'(x)>0$,当$x\in(2021,+\infty)$时,$f'(x)<0$,而$f(2021)>0$,不妨设$0<a<2021<b$,则$\frac{b}{a}=t(t>1)$;两式相减,可得

$2021\ln\frac{b}{a}=b-a$，则 $2021\ln t=a(t-1)$，则 $a=\frac{2021\ln t}{t-1}$，则 $b=at=\frac{2021t\ln t}{t-1}$，则 $ab=\frac{2021^2\cdot t(\ln t)^2}{(t-1)^2}$；令 $g(t)=t(\ln t)^2-(t-1)^2$，故 $g'(t)=(\ln t)^2+2\ln t-2t+2=h(t)$，则 $h'(t)=\frac{2}{t}(\ln t+1-t)$；令 $m(t)=\ln t+1-t$，故 $m'(t)=\frac{1}{t}-1<0$，故函数 $m(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，故 $m(t)<m(1)=0$，则 $h'(t)=\frac{2}{t}(\ln t+1-t)<0$，故函数 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，故 $h(t)<h(1)=0$，即 $g'(t)<0$，故函数 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，故 $g(t)<g(1)=0$，故 $t(\ln t)^2-(t-1)^2<0$，即 $\frac{t(\ln t)^2}{(t-1)^2}<1$，故 $ab<2021^2$，故实数 λ 的取值范围为 $[2021^2,+\infty)$，故选 C.

二、填空题

13.【答案】$\frac{19}{5}$.

【命题意图】本题考查平面向量的坐标运算、向量垂直的坐标表示，考查数学运算的核心素养.

【解析】依题意，$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,5)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=(-4,3-\lambda)$；而 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=0$，故 $4+15-5\lambda=0$，解得 $\lambda=\frac{19}{5}$.

14.【答案】-560.

【命题意图】本题考查二项式定理的应用，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$(2\sqrt[4]{x^3}-x)^7$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_7^r(2x^{\frac{3}{4}})^{7-r}\cdot(-x)^r=C_7^r\cdot2^{7-r}\cdot(-1)^r\cdot x^{\frac{21+r}{4}}$；令 $\frac{21+r}{4}=6$，得 $r=3$，故 x^6 的系数为 $C_7^3\cdot2^4\cdot(-1)^3=-560$.

15.【答案】$\frac{3\pi}{4}$，4.

【命题意图】本题考查正弦定理、余弦定理、三角形的面积公式，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】因为 $\frac{a\cos C+c\cos A}{\cos C}+\sqrt{2}b=0$，故 $a\cos C+c\cos A+\sqrt{2}b\cos C=0$，则 $\sin A\cos C+\sin C\cos A+\sqrt{2}\sin B\cos C=0$，故 $\sin(A+C)+\sqrt{2}\sin B\cos C=0$；因为 $A+C=\pi-B$，则 $\sin(A+C)=\sin B\neq0$，则 $1+\sqrt{2}\cos C=0$，故 $\cos C=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $C=\frac{3\pi}{4}$；而 $b\sin\left(A+\frac{3\pi}{2}\right)-a\cos(B+\pi)=\frac{b\sin B}{\sin C}$，故 $ac\cos B-bc\cos A=b^2$，则 $ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b^2$，化简得 $a^2=2b^2$，则 $b=2\sqrt{2}$，故 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4$.

16.【答案】$(-\infty,3\sqrt{3}]$.

【命题意图】本题考查椭圆的方程、直线与椭圆的综合性问题，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，得 $M(-2,0)$，$N(2,0)$. 设 $P(x_1,y_1)$，则 $Q(-x_1,-y_1)(x_1\neq\pm2)$，$k_{MP}=\frac{y_1}{x_1+2}$，直线 MP 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，令 $x=0$，得 $y_A=\frac{2y_1}{x_1+2}$，即 $A\left(0,\frac{2y_1}{x_1+2}\right)$，又 $k_{MQ}=\frac{y_1}{x_1-2}$，直线 MQ 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1-2}(x+2)$，令 $x=0$，得 $y_B=\frac{2y_1}{x_1-2}$，即 $B\left(0,\frac{2y_1}{x_1-2}\right)$；四边形 $MAFB$ 的面积为 $\frac{1}{2}|MF|\cdot|AB|=$

$\frac{3}{2}|AB|$，$|AB|=\left|\frac{2y_1}{x_1+2}-\frac{2y_1}{x_1-2}\right|=\left|\frac{8y_1}{x_1^2-4}\right|$．因为点 P 在椭圆上且异于左、右顶点，所以$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$，$0<y_1\leqslant\sqrt{3}$，所以 $x_1^2-4=-\frac{4}{3}y_1^2$，所以$|AB|=\frac{6}{y_1}$，所以当 $y_1=\sqrt{3}$ 时，$|AB|_{\min}=2\sqrt{3}$，所以四边形 $MAFB$ 面积的最小值为 $3\sqrt{3}$，则实数 λ 的取值范围为$(-\infty,3\sqrt{3}]$．

三、解答题

17.【命题意图】本题考查样本的数字特征、回归直线方程及其应用，考查数学建模、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意，$(0.005+0.012+m+0.034+0.015+0.003)\times10=1$，…………………… (1分)

解得 $m=0.031$. ………………………………………………………………………… (2分)

(2)①依题意，$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5+6+7}{7}=4$，

$\bar{y}=\frac{15+18+27+23+20+29+36}{7}=24$，………………………………………… (3分)

$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=(-3)\times(-9)+(-2)\times(-6)+(-1)\times3+1\times(-4)+2\times5+3\times12=78$，

…………………………………………………………………………………………… (5分)

$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2=(-3)^2+(-2)^2+(-1)^2+1^2+2^2+3^2=28$，…………………… (6分)

$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{39}{14}$，…………………………………………………… (7分)

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=24-\frac{39}{14}\times4=\frac{90}{7}$，故所求回归直线方程为 $\hat{y}=\frac{39}{14}x+\frac{90}{7}$；…………………… (8分)

②小明这 100 天慢跑的平均时间为：

$5\times0.05+15\times0.12+25\times0.31+35\times0.34+45\times0.15+55\times0.03=30.1$；…………… (10分)

将 $x=9$ 代入 $\hat{y}=\frac{39}{14}x+\frac{90}{7}$ 中，得 $y=\frac{39}{14}\times9+\frac{90}{7}\approx37.93>30.1$，………………… (11分)

故可以预测小强第 9 次的慢跑时间会超过小明这 100 天慢跑的平均时间. …………… (12分)

18.【命题意图】本题考查空间线面的位置关系、向量法求空间角，考查直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)延长 BA，CD 交于点 P'，连接 PP'，

则 PP' 即为平面 PAB 与平面 PCD 的交线 l. ………………………………………… (1分)

$\because AD/\!/BC$，$BC=2AD$，故在$\triangle P'BC$ 中，A、D 分别为所在线段的中点，

故 $P'A=AB=PA$；故 $P'P\perp PB$；………………………………………………… (2分)

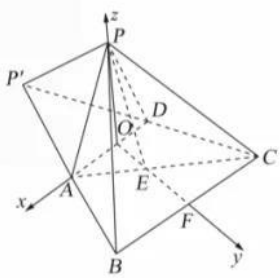
同理可得，$P'P\perp PC$，

$PB\cap PC=P$，故 $P'P\perp$平面 PBC；……………………………… (3分)

而 $BC\subset$平面 PBC，故 $P'P\perp BC$，即 $l\perp BC$；………………… (4分)

而 $AD/\!/BC$，故 $l\perp AD$. ………………………………………… (5分)

(2)取 AD 的中点 O，取 BC 的中点 F，连接 OF，可知点 E 在线段 OF 上，故以 OA 所在直线为 x 轴，OE 所在直线为 y 轴，OP 所在直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系；……………………………………… (6分)



因为$\triangle PAD$ 是面积为$\sqrt{3}$的等边三角形，故 $AD=2$，

故 $P(0,0,\sqrt{3}),B(2,\sqrt{3},0),C(-2,\sqrt{3},0),E\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$,

故 $\overrightarrow{PE}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},-\sqrt{3}\right),\overrightarrow{PB}=(2,\sqrt{3},-\sqrt{3}),\overrightarrow{BC}=(-4,0,0)$, ……………………………………(8分)

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,1)$,

$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 故 $\begin{cases}2x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}=0,\\ -4x=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\ y=1,\end{cases}$ 故 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$,

记 PE 与平面 PBC 所成的角为 θ,则 $\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PE}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{PE}|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, ……………………………………(10分)

故所求余弦值为 $\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. ……………………………………(12分)

19.【命题意图】本题考查等差数列的通项公式以及前 n 项和公式、分组求和法、裂项相消法,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意,$S_5=5a_3=25$,则 $a_3=5$, ……………………………………(1分)

故 $a_2+a_5+a_{10}=a_3-d+a_3+2d+a_3+7d=31$, ……………………………………(2分)

解得 $d=2$, ……………………………………(3分)

故 $a_1=a_3-2d=1$, ……………………………………(4分)

故 $a_n=2n-1$, ……………………………………(5分)

$S_n=\frac{1+2n-1}{2}\cdot n=n^2$. ……………………………………(7分)

(2)依题意,得 $\frac{1}{a_na_{n+2}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right)$, ……………………………………(8分)

故 $b_n=\begin{cases}2^{2n-1},n\text{ 为奇数},\\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right),n\text{ 为偶数},\end{cases}$

故 $T_{2n-1}=2^1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+2^5+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-5}-\frac{1}{4n-1}\right)+2^{4n-3}$

$=2^1+2^5+\cdots+2^{4n-3}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{4n-5}-\frac{1}{4n-1}\right)=\frac{2^{4n+1}-2}{15}+\frac{n-1}{3(4n-1)}$. ……(12分)

20.【命题意图】本题考查抛物线的定义、抛物线的方程、直线与抛物线的综合性问题,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的数学素养.

【解析】(1)设直线 $l:y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)$; ……………………………………(1分)

联立 $\begin{cases}y^2=2px,\\ y=2\left(x-\frac{p}{2}\right),\end{cases}$ 得 $4\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=2px$,故 $4\left(x^2-px+\frac{p^2}{4}\right)=2px$,

即 $4x^2-6px+p^2=0$, ……………………………………(3分)

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,故 $|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=\frac{5}{2}p=15$,解得 $p=6$,

故抛物线 C 的方程为 $y^2=12x$. ……………………………………(5分)

(2)因为 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=|FD|^2\cdot\cos\angle AFB$,故 $|FA|\cdot|FB|=|FD|^2$;

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases}y^2=2px,\\ y=k(x-m),\end{cases}$ 消去 y 得 $k^2x^2-2(k^2m+p)x+k^2m^2=0$,

显然 $k\neq0$，因为 $m>0,p>0$，故 $\Delta>0$，而 $\begin{cases}x_1+x_2=2m+\dfrac{2p}{k^2},\\x_1x_2=m^2,\end{cases}$ ……………………………… (7 分)

故 $D\left(-\frac{p}{2},-k\left(m+\frac{p}{2}\right)\right)$，从而 $|FD|^2=p^2+k^2\left(m+\frac{p}{2}\right)^2$， ……………………………… (8 分)

由抛物线定义可知，$|FA|=x_1+\frac{p}{2}$，$|FB|=x_2+\frac{p}{2}$，

故 $|FA|\cdot|FB|=\left(x_1+\frac{p}{2}\right)\left(x_2+\frac{p}{2}\right)=x_1x_2+\frac{p}{2}(x_1+x_2)+\frac{p^2}{4}=\left(m+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{p^2}{k^2}$，

由 $|FA|\cdot|FB|=|FD|^2$，得 $\left(m+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{p^2}{k^2}=p^2+k^2\left(m+\frac{p}{2}\right)^2$，

即 $(k^2-1)\left[\left(m+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{p^2}{k^2}\right]=0$， ……………………………… (11 分)

因为 $\left(m+\frac{p}{2}\right)^2>0$，$\frac{p^2}{k^2}>0$，故 $k^2=1$，解得 $k=\pm1$. ……………………………… (12 分)

21.【命题意图】本题考查利用导数研究函数的性质，考查数学运算、逻辑推理、数学抽象的核心素养.

【解析】(1)依题意，$f(x)=e^x+\frac{1}{2}x^2-x$，$f'(x)=e^x+x-1$， ……………………………… (1 分)

易知函数 $f'(x)$ 为增函数，且 $f'(0)=0$， ……………………………… (2 分)

故当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$， ……………………………… (3 分)

故函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$. ……………………………… (4 分)

(2)证明：要证 $32f(x)>-7$，即证 $e^x+\frac{1}{2}x^2+ax+\frac{7}{32}>0$；

①当 $x\geqslant0$ 时，因为 $a\in[0,1]$，则显然有 $e^x+\frac{1}{2}x^2+ax+\frac{7}{32}>0$； ……………………………… (5 分)

②当 $x<0$ 时，令 $g(a)=xa+e^x+\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{32}$，可知函数 $g(a)$ 在 $a\in[0,1]$ 时单调递减，

所以只需证明 $g(1)>0$，即证 $e^x+\frac{1}{2}x^2+x+\frac{7}{32}>0$； ……………………………… (6 分)

令 $h(x)=e^x+\frac{1}{2}x^2+x+\frac{7}{32}(x<0)$，则 $\varphi(x)=h'(x)=e^x+x+1$，

显然 $\varphi(x)$ 单调递增，$\varphi(-2)<0$，$\varphi(-1)>0$，所以存在唯一 $x_0\in(-2,-1)$，使 $\varphi(x_0)=0$，

且 $x\in(-\infty,x_0)$ 时 $\varphi(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；$x\in(x_0,+\infty)$ 时 $\varphi(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

所以 $h(x)\geqslant h(x_0)$. ……………………………… (8 分)

因为 $\varphi(x_0)=0$，所以 $e^{x_0}+x_0+1=0$，即 $e^{x_0}=-(x_0+1)$，

所以 $h(x)\geqslant h(x_0)=e^{x_0}+\frac{1}{2}x_0^2+x_0+\frac{7}{32}=-(x_0+1)+\frac{1}{2}x_0^2+x_0+\frac{7}{32}=\frac{1}{2}x_0^2-\frac{25}{32}$. ………… (10 分)

又因为 $\ln4\approx1.386>\frac{5}{4}$，所以 $e^{\frac{5}{4}}<4$，所以 $\varphi\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{e^{\frac{5}{4}}}-\frac{1}{4}>0$，

从而 $x_0\in\left(-2,-\frac{5}{4}\right)$，所以 $\frac{1}{2}x_0^2-\frac{25}{32}>\frac{1}{2}\times\left(-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{32}=0$. ……………………………… (11 分)

所以 $h(x)>0$，故 $e^x+\frac{1}{2}x^2+ax+\frac{7}{32}>0$；

综上所述，若 $a\in[0,1]$，则 $32f(x)>-7$. ……………………………… (12 分)

22.【命题意图】本题考查曲线的极坐标方程、曲线的参数方程以及直线参数方程的应用，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)依题意，得曲线 $C_1:(x-1)^2+y^2=1$， ……………………………… (1分)
令 $y=0$，解得 $x=2$，故 $A(2,0)$； ……………………………… (2分)
而 $x^2-2x+y^2=0$，故 $x^2+y^2=2x$，即 $\rho^2=2\rho\cos\theta$， ……………………………… (3分)
故曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$. ……………………………… (4分)
(2)依题意，得曲线 $C_3:x^2+y^2=1$，即 $\rho=1$.

当 $\theta_0=\frac{2\pi}{3}$ 时，点 B 的坐标为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则 $k_{AB}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}-2}=-\frac{\sqrt{3}}{5}$， ……………………………… (7分)

故可设直线 AB 的参数方程为 $\begin{cases} x=2-\frac{5\sqrt{7}}{14}t, \\ y=\frac{\sqrt{21}}{14}t, \end{cases}$ (t 为参数)，

代入 $x^2+y^2=1$ 并化简得 $t^2-\frac{10\sqrt{7}}{7}t+3=0$， ……………………………… (9分)

设 B、D 所对的参数分别为 t_1、t_2，则 $|AB|\cdot|AD|=|t_1t_2|=3$. ……………………………… (10分)

23.【命题意图】本题考查绝对值不等式的解法、绝对值不等式的性质，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意，得 $|4x+2|-|4x+4|+\frac{1}{2}x<1$，

当 $x\leqslant-1$ 时，$-4x-2+4x+4+\frac{1}{2}x<1$，解得 $x<-2$，故 $x<-2$； ……………………………… (2分)

当 $-1<x<-\frac{1}{2}$ 时，$-4x-2-4x-4+\frac{1}{2}x<1$，解得 $x>-\frac{14}{15}$，故 $-\frac{14}{15}<x<-\frac{1}{2}$； ……………………………… (3分)

当 $x\geqslant-\frac{1}{2}$ 时，$4x+2-4x-4+\frac{1}{2}x<1$，解得 $x<6$，故 $-\frac{1}{2}\leqslant x<6$； ……………………………… (4分)

故不等式 $f(x)+\frac{1}{2}x<1$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x<-2\text{ 或 }-\frac{14}{15}<x<6\right\}$. ……………………………… (5分)

(2)依题意，$f\left(\frac{1}{2}x\right)>m\Leftrightarrow|2x+a|-|2x+a^2|>m$，

而 $|2x+a|-|2x+a^2|\leqslant|2x+a-2x-a^2|=|a-a^2|$，故 $|a-a^2|>m$， ……………………………… (7分)
令 $g(a)=|a-a^2|$，$a\in[0,2]$，
结合 $g(a)$ 的图象可知，$[g(a)]_{max}=g(2)=2$，故 $m<2$，
故实数 m 的取值范围为 $(-\infty,2)$. ……………………………… (10分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。