高二数学试卷参考答案

1. D　因为 $A=\{x|-2\leqslant x<2\}$，$B=\{-3,-2,-1,0,1,2\}$，所以 $A\cap B=\{-2,-1,0,1\}$.

2. C　因为 $\xi\sim N(5,\sigma^2)$，$P(3\leqslant\xi\leqslant7)=0.4$，所以 $P(\xi>7)=\dfrac{1-0.4}{2}=0.3$.

3. B　若 $\{a_n\}$ 为等比数列，则 $a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}(n\geqslant2)$ 一定成立；若 $a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}$，则 $\{a_n\}$ 不一定为等比数列. 比如 $a_n=0$.

4. C　因为英文字母有 26 个，所以 2 个英文字母的排列有 A_{26}^2 种. 因为数字有 10 个，所以数字的排列有 A_{10}^2 种，所以该密码可能的个数是 $A_{26}^2A_{10}^2$.

5. B　$f(-x)=\dfrac{-x^3e^{-x}}{e^{-2x}-1}=\dfrac{x^3e^x}{e^{2x}-1}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，排除 C，D. 当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，排除 A，故选 B.

6. B　将 2 道必须相邻的工序捆绑在一起看作一个元素，加工顺序的种数为 $A_3^3A_2^2A_4^2=144$.

7. B　$(6x+\dfrac{1}{3\sqrt{x}})^9$ 的通项 $T_{r+1}=C_9^r(6x)^{9-r}(\dfrac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}})^r=C_9^r6^{9-r}3^{-r}x^{9-\frac{3}{2}r}$，所以按 x 的升幂排列的第 4 项为 $T_{6+1}=C_9^6\times6^3\times3^{-6}=\dfrac{224}{9}$.

8. D　因为 $x>y>1>z>0$，所以 $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{z}$，所以 $a=x+\dfrac{1}{z}>b=y+\dfrac{1}{x}$，$a=x+\dfrac{1}{z}>c=z+\dfrac{1}{y}$. 当 $x=4$，$y=\dfrac{4}{3}$，$z=\dfrac{6}{7}$ 时，$c>b$；当 $x=4$，$y=\dfrac{4}{3}$，$z=\dfrac{1}{4}$ 时，$c<b$. 所以 b，c 的大小不能确定，所以 $a>b$ 且 $a>c$.

9. ABD　由题意可得 $E(X)=6$，$D(X)=\dfrac{12}{5}$，则 $E(Y)=28$，$D(Y)=60$.

10. BCD　由图可知 $f(x)$ 在 $x=a$ 及 $x=d$ 处取得极大值，A 错误，B 正确. 当 $x\in[b,d]$ 时，$f'(x)\geqslant0$，则 $f(x)$ 单调递增，则 $f(b)<f(c)<f(d)$，C 正确. 当 $x\in[a,b]$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，则 $f(a)>f(b)$，D 正确.

11. ACD　令 $x=0$，则 $a_0=1$. 令 $x=1$，则 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9=0$，则 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9=-1$. 令 $x=-1$，则 $a_0-a_1+a_2-\cdots-a_9=2^9$，则 $2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)=-2^9$，则 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=-2^8=-256$. 令 $x=2$，则 $a_0+2a_1+2^2a_2+\cdots+2^9a_9=-1$，从而 $2a_1+2^2a_2+2^3a_3+\cdots+2^9a_9=-2$. 故选 ACD.

12. AB　因为 $f(x)$ 为偶函数，且当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=x\ln(x+1)$，所以 $f(-1)=f(1)=\ln 2$，故 A 正确.

因为 $f(x)$ 为偶函数，且 $f(-x+2)=f(x+2)$，所以 $f(-x+2)=f(x+2)=f(x-2)$，所以 $f(x+4)=f(x)$，所以 $f(x)$ 的周期为 4，故 B 正确.

因为 $f(-x+2)=f(x+2)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称. 因为 $f(x)$ 的周期为 4，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称，故 C 错误.

因为 $f(0)=0, f(1)=\ln 2, f(2)=2\ln 3, f(3)=f(1)=\ln 2$，

所以 $f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(2023)=506(0+\ln 2+2\ln 3+\ln 2)=1012\ln 6$，故 D 错误.

13.7　因为 $C_{n+1}^{n-1}=C_{n+1}^{2}=\frac{(n+1)n}{2}=28$，所以 $n^2+n-56=(n-7)(n+8)=0$，所以 $n=7$ 或 $n=-8$（舍去）.

14.$(-\infty,2)$；$2\sqrt{3}$　由 $2-x>0$，得 $x<2$，则 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,2)$.

$f(x)=\frac{3+2-x}{\sqrt{2-x}}=\frac{3}{\sqrt{2-x}}+\sqrt{2-x}\geqslant 2\sqrt{3}$，当且仅当 $\frac{3}{\sqrt{2-x}}=\sqrt{2-x}$，即 $x=-1$ 时，等号成立，所以 $f(x)$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$.

15.-17（或 -19，-18，只需填写一个答案即可）　因为 $a_1=190$，所以 $S_{20}=20\times190+190d$，$S_{24}=24\times190+\frac{24\times23}{2}\times d$. 因为 $S_{20}>0$，$S_{24}<0$，所以 $-20<d<-\frac{380}{23}$，故 d 的整数解为 -19，-18，-17.

16.0.49　记事件 A 为“利率下调”，事件 B 为“利率不变”，事件 C 为“利率上调”，事件 D 为“股价上涨”，则 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.3$，$P(C)=0.1$，$P(D|A)=0.7$，$P(D|B)=0.2$，$P(D|C)=0.1$，所以 $P(D)=P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)=0.49$.

17.解：(1)设 $\{a_n\}$ 的公差为 d. 由 $a_2+a_{10}=34$，可得 $a_6=17$. ………………………… 1 分

因为 $a_5=14$，所以 $d=a_6-a_5=3$. ………………………… 2 分

因为 $a_5=a_1+4d=14$，所以 $a_1=2$，故 $a_n=3n-1$. ………………………… 5 分

(2)因为 $a_n=3n-1$，所以 $\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2})$， ………………………… 8 分

所以 $S_n=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{5})+\frac{1}{3}(\frac{1}{5}-\frac{1}{8})+\cdots+\frac{1}{3}(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2})=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2})=\frac{n}{6n+4}$.

………………………… 10 分

18.解：(1)由题可知 $\begin{cases}\frac{280+q}{400+p+q}=\frac{4}{7},\\ \frac{p}{p+120}=\frac{3}{5},\end{cases}$ ………………………… 3 分

解得 $p=180$，$q=120$. ………………………… 6 分

(2)根据列联表及(1)中数据，经计算得到 $\chi^2=\frac{700\times(280\times120-180\times120)^2}{460\times240\times400\times300}\approx7.609<10.828$.

………………………… 9 分

所以没有 99.9% 的把握认为学生的性别与喜欢体育锻炼之间有关联. ………………………… 12 分

19.解：(1)因为 $f(x)=x^3-x^2+ax$，所以 $f'(x)=3x^2-2x+a$. ………………………… 1 分

因为 $f(x)$ 的极小值点为 1，所以 $f'(1)=1+a=0$，所以 $a=-1$. ………………………… 3 分

因为 $f'(x)=3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1)$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\frac{1}{3},1)$ 上单调递减，在 $(-\infty,-\frac{1}{3})$，$(1,+\infty)$ 上单调递增， ………………………… 4 分

所以 $f(x)$ 的极小值点为 1,符合题意. …………………………………………………… 5 分

(2)设切点为 $(x_0, f(x_0))$,则 $f(x_0)=x_0^3-x_0^2-x_0$, $f'(x_0)=3x_0^2-2x_0-1$,

所以切线方程为 $y-(x_0^3-x_0^2-x_0)=(3x_0^2-2x_0-1)(x-x_0)$, ………………………… 7 分

将点 $(-1,-1)$ 代入得 $-1-(x_0^3-x_0^2-x_0)=(3x_0^2-2x_0-1)(-1-x_0)$,

整理得 $x_0^3+x_0^2-x_0-1=(x_0-1)(x_0+1)^2=0$,所以 $x_0=\pm 1$. ………………… 10 分

当 $x_0=1$ 时,切线方程为 $y=-1$; ………………………………………………………… 11 分

当 $x_0=-1$ 时,切线方程为 $y+1=4(x+1)$,即 $4x-y+3=0$. ……………………………… 12 分

20. 解:(1)因为样本数据都落在直线 $y=-0.76x+0.58$ 上,且直线的斜率为负数,所以相关系数为 -1. …………………………………………………………………………………………… 3 分

(2) $\bar{x}=\dfrac{80+78+81+84+86+90+91+93+88+89}{10}=86$, ………………………… 4 分

$\bar{y}=\dfrac{26+33+24+20+18+10+9+7+12+11}{10}=17$, ……………………………… 5 分

$\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=(-6)\times 9+(-8)\times 16+(-5)\times 7+(-2)\times 3+0\times 1+4\times(-7)+5\times(-8)+7\times(-10)+2\times(-5)+3\times(-6)=-389$, ……………………………… 6 分

$\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2=(-6)^2+(-8)^2+(-5)^2+(-2)^2+0^2+4^2+5^2+7^2+2^2+3^2=232$, … 7 分

$\sum\limits_{i=1}^{10}(y_i-\bar{y})^2=9^2+16^2+7^2+3^2+1^2+(-7)^2+(-8)^2+(-10)^2+(-5)^2+(-6)^2=670$,

…………………………………………………………………………………………………… 8 分

$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{10}(y_i-\bar{y})^2}}=\dfrac{-389}{\sqrt{232\times 670}}\approx\dfrac{-389}{394.3}\approx -0.987$, ……………………… 10 分

所以 $|r|>0.85$, ………………………………………………………………………………… 11 分

所以乘客投诉次数与航班正点率之间具有很强的线性相关关系. ……………………… 12 分

21. 解:(1)设向前移动 1 步为事件 A,所以 $P(A)=\dfrac{3}{4}$, $P(\overline{A})=\dfrac{1}{4}$, ……………………………… 2 分

移动 4 步,回到点 O 相当于 4 步中两步向前,两步向后,

所以 $P(A)=C_4^2\times(\dfrac{3}{4})^2\times(\dfrac{1}{4})^2=\dfrac{27}{128}$. …………………………………………………… 4 分

(2)由题知,X 的可能取值为 1,3,5,

$P(X=1)=C_5^3\times(\dfrac{3}{4})^3\times(\dfrac{1}{4})^2+C_5^2\times(\dfrac{3}{4})^2\times(\dfrac{1}{4})^3=\dfrac{90}{256}=\dfrac{45}{128}$, ……………………… 6 分

$P(X=3)=C_5^4\times(\dfrac{3}{4})^4\times(\dfrac{1}{4})^1+C_5^1\times(\dfrac{3}{4})^1\times(\dfrac{1}{4})^4=\dfrac{105}{256}$, ……………………………… 7 分

$P(X=5)=(\dfrac{3}{4})^5+(\dfrac{1}{4})^5=\dfrac{61}{256}$, ……………………………………………………… 8 分

所以 X 的分布列为

X	1	3	5
P	$\frac{45}{128}$	$\frac{105}{256}$	$\frac{61}{256}$

………………………………………………………………………… 10 分

所以随机变量 X 的期望 $E(X)=1\times\frac{90}{256}+3\times\frac{105}{256}+5\times\frac{61}{256}=\frac{355}{128}$. ………………… 12 分

22. 解:(1)因为函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

因为 $f'(x)=2ax-\ln x-1$,所以 $2ax-\ln x-1\geqslant 0$,即 $2a\geqslant\frac{\ln x+1}{x}$. ………………… 1 分

令 $g(x)=\frac{\ln x+1}{x}$,则 $g'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$,

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,所以 $g(x)_{\max}=g(1)=1$. …… 4 分

由 $2a\geqslant 1$,得 $a\geqslant\frac{1}{2}$,即 a 的取值范围是 $[\frac{1}{2},+\infty)$. ………………………………… 5 分

(2)①由题意知关于 x 的方程 $ax^2-x\ln x=x$ 有两个不相等的实数根 x_1,x_2,

即关于 x 的方程 $ax-\ln x=1$ 有两个不相等的实数根,即关于 x 的方程 $a=\frac{\ln x+1}{x}$ 有两个不相等的实数根,等价于直线 $y=a$ 与曲线 $y=g(x)$ 有两个不同的交点.

由(1)知,$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,

且当 $x\in(0,\frac{1}{e})$ 时,$g(x)<0$,当 $x\in(\frac{1}{e},+\infty)$ 时,$g(x)>0$,所以 $a\in(0,1)$. ………… 7 分

②因为 $\begin{cases}ax_1-\ln x_1=1,\\ax_2-\ln x_2=1,\end{cases}$ 所以 $a=\frac{\ln x_1+\ln x_2+2}{x_1+x_2}=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$,所以 $\ln(x_1x_2)+2=\frac{(x_1+x_2)\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}=\frac{(\frac{x_1}{x_2}+1)\ln\frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2}-1}$. ………………………………………… 9 分

令 $\frac{x_1}{x_2}=t$,因为 $x_2\geqslant 3x_1$,所以 $t\in(0,\frac{1}{3}]$,所以 $\ln(x_1x_2)+2=\frac{(t+1)\ln t}{t-1}$.

令 $h(t)=\frac{(t+1)\ln t}{t-1}$,$t\in(0,\frac{1}{3}]$,则 $h'(t)=\frac{t-\frac{1}{t}-2\ln t}{(t-1)^2}$. ……………………………… 10 分

令 $\varphi(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t$,则 $\varphi'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\frac{(t-1)^2}{t^2}>0$,所以 $\varphi(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,

所以 $\varphi(t)<\varphi(1)=0$,所以当 $t\in(0,\frac{1}{3}]$ 时,$h'(t)<0$,所以 $h(t)$ 在 $(0,\frac{1}{3}]$ 上单调递减. ……

………………………………………………………………… 11 分

因为 $h(t)\geqslant h(\frac{1}{3})=2\ln 3$,所以 $\ln(x_1x_2)+2\geqslant 2\ln 3$,所以 $\ln(x_1x_2)\geqslant 2\ln 3-2=\ln\frac{9}{e^2}$,所以 $x_1x_2\geqslant\frac{9}{e^2}$. ………………………………………………………… 12 分