2023届高三第一次模考·理科数学

参 考 答 案

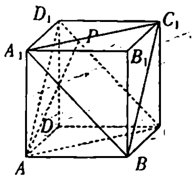
1. C　∵$A=\{x|x<-4$ 或 $x>1\}$，∴$\complement_{R}A=\{x|-4\leqslant x\leqslant1\}$，∴$(\complement_{R}A)\cap B=\{-2,-1,1\}$.

2. B　∵$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+i}{-1+2i}=\frac{(2+i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}=\frac{-5i}{5}=-i$，∴$|z_1-\frac{z_1}{z_2}|=|2+i+i|=2\sqrt2$.

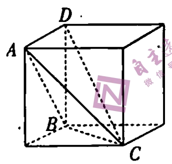
3. A　∵该正四棱台的高为$\sqrt{11-(2\sqrt2-\sqrt2)^2}=3$，∴正四棱台的体积 $V=\frac13\times(2^2+2\times4+4^2)\times3=28$.

4. B　∵$a_{2n-1}+a_{2n}<0\Leftrightarrow a_1(q^{2n-2}+q^{2n-1})<0\Leftrightarrow q^{2(n-1)}(q+1)<0\Leftrightarrow q\in(-\infty,-1)$，
∴"$q<-2$"是"对任意的正整数 n，$a_{2n-1}+a_{2n}<0$"的充分不必要条件.

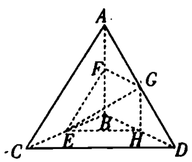
5. C　∵AA_1 与 CC_1 平行且相等，得四边形 ACC_1A_1 为平行四边形，∴$A_1C_1// AC$，∵$AC\not\subset$平面 A_1BC_1，$A_1C_1\subset$平面 A_1BC_1，∴$AC//$平面 A_1BC_1，同理可得 $AD_1//$平面 A_1BC_1.
∵AD_1，AC 是平面 AD_1C 内两条相交直线，∴平面 $AD_1C//$平面 A_1BC_1，又 $AP\subset$平面 AD_1C，∴$AP//$平面 A_1BC_1.



6. D　由三视图可得四面体 $ABCD$，设球的半径为 R，∵$V=\frac13\times\frac12\times2\times2\times2=\frac43\pi R^3$，
∴$R=\sqrt[3]{\frac1\pi}$，∴该铁球的表面积为 $S=4\pi R^2=4\pi\sqrt[3]{\frac{1}{\pi^2}}=4\sqrt[3]{\pi}$.



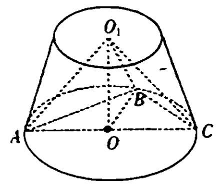
7. C　如图，取 BC，AB，AD 的中点 E，F，G，连接 EF，FG，EG.
∵$EF//AC$，$FG//BD$，∴$\angle EFG$(或其补角)即为 AC 与 BD 所成的角.
∵$AB\perp$平面 BCD，∴$AB\perp BC$，∴$AC=2\sqrt5$，则 $EF=\sqrt5$，
∵$BC\perp CD$，∴$BD=4\sqrt2$，$FG=2\sqrt2$.
取 BD 的中点 H，连接 GH，EH，∴$HG//AB$，∴$HG\perp$平面 BCD，
∴$HG\perp EH$，又 $GH=\frac12AB=1$，$EH=\frac12CD=2$，
∴$EG=\sqrt{GH^2+EH^2}=\sqrt5$，



∴$\cos\angle EFG=\frac{(\sqrt5)^2+(2\sqrt2)^2-(\sqrt5)^2}{2\times\sqrt5\times2\sqrt2}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，
∴AC 与 BD 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$.

8. B　∵$\cos C=\frac{31}{32}$，∴$\cos(A+B)=-\frac{31}{32}$，$\sin C=\frac{3\sqrt7}{32}$，
又∵$\cos(A-B)=\frac18$，$a>b$，∴$A>B$.∴$\sin(A-B)=\frac{3\sqrt7}{8}$.
∴$\cos2B=\cos[(A+B)-(A-B)]=-\frac{31}{32}\times\frac18+\frac{3\sqrt7}{32}\times\frac{3\sqrt7}{8}=\frac18$，
∴$\sin^2B=\frac{7}{16}$，$\sin B=\frac{\sqrt7}{4}$，$\cos B=\frac34$，
$\sin A=\sin(B+C)=\frac{\sqrt7}{4}\times\frac{31}{32}+\frac34\times\frac{3\sqrt7}{32}=\frac{5\sqrt7}{16}$.
∵$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，∴$b=8$，∴$S_{\triangle ABC}=\frac12\times8\times10\times\frac{3\sqrt7}{32}=\frac{15\sqrt7}{4}$.

9. B　如图，连接 AB，BC，OO_1，BO，易知 $OO_1\perp$底面 ABC，
∵$O_1A\perp O_1C$，$O_1A=O_1C=2\sqrt2$，∴$AC=4$，$OO_1=2$，
∵B 为圆弧 AC 上靠近点 C 的一个三等分点，
∴$\angle BOC=\frac\pi3$，$\angle BAC=\frac\pi6$.

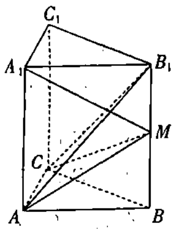


∵AC 为圆 O 的一条直径，∴$\angle ABC=\frac\pi2$，$AB=2\sqrt3$，$BC=2$，
∵$OO_1\perp$底面 ABC，∴三棱锥 O_1-ABC 的体积 $V=\frac13\times\frac12\times2\sqrt3\times2\times2=\frac{4\sqrt3}{3}$.
∵O_1 是圆 O_1 的圆心，A，B，C 都在圆 O 上，∴$O_1A=O_1C=O_1B=2\sqrt2$，
∴$S_{\triangle O_1BC}=\frac12\times2\times\sqrt{(2\sqrt2)^2-1^2}=\sqrt7$.
设点 A 到平面 CBO_1 的距离为 d，∵$\frac13\times\sqrt7\times d=\frac{4\sqrt3}{3}$，∴解得 $d=\frac{4\sqrt{21}}{7}$.

10. B　设 $f(x)=e^x-x-1$，∵$f'(x)=e^x-1$，
∴当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，
当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，
∴当 $x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，即 $e^x>x+1$.
∵$a=3e^{-0.3}>3\times(-0.3+1)=2.1$，$b=e^{0.6}>0.6+1=1.6$，∴$c=1.6$ 最小，
又∵$\frac ba=\frac{e^{0.6}}{3e^{-0.3}}=\frac{e^{0.9}}{3}<\frac e3<1$，∴$b<a$. 综上可知，$c<b<a$.

11. D　由题设,可得直三棱柱,如图.

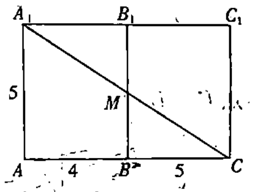
由直三棱柱的结构特征知 AM 与 A_1C_1 是异面直线,A 项正确;



因为 $AA_1\perp AC$,$BA\perp AC$,且 $AA_1\cap BA=A$,所以 $AC\perp$ 平面 AA_1B_1B,又 $A_1M\subset$ 平面 AA_1B_1B,故 $AC\perp A_1M$,B 项正确;

由图知,平面 AB_1C 将三棱柱截成四棱锥 $B_1-ACC_1A_1$ 和三棱锥 B_1-ABC,一个五面体和一个四面体,C 项正确;

将平面 AA_1B_1B 和平面 CC_1B_1B 展开,展开为一个平面,如下图,



当 A_1,M,C 共线时,A_1M+MC 的最小值为 $\sqrt{106}$,D 项错误.

12. D　$\because\begin{cases}A+1=3\\A-1=1\end{cases}$,$\therefore A=2$,$\therefore f(x)=2\cos(2x+\varphi)-1$,

又 $\because|f(0)|=|2\cos\varphi-1|=2$,$0<\varphi<\pi$,$\therefore\varphi=\frac{2\pi}{3}$,

$\therefore g(x)=2\sin(2x-\frac{2}{3}\pi)$,其图象对称轴为 $2x-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,当 $k=-1$ 时,$x=\frac{\pi}{12}$,

$\therefore$ A 项正确;

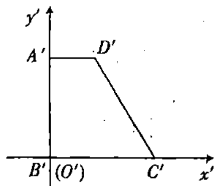
$\because 2x-\frac{2\pi}{3}=k\pi$,$x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,$\therefore g(x)$ 的图象关于点$(\frac{\pi}{3},0)$对称,$\therefore$ B 项正确;

$\because$ 函数 $g(x)$ 的单调递减区间为 $-\frac{3\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{2}{3}\pi\leqslant-\frac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore-\frac{5}{12}\pi+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,$\therefore$ 当 $k=0$ 时,$g(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{12}]$ 上单调递减,$\therefore$ C 项正确;

$\because f(x+\frac{\pi}{6})+1=2\cos(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3})=-2\cos 2x\neq g(x)$,$\therefore$ D 项错误.

13. $2+\frac{\sqrt{2}}{2}$　$\because B'C'=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\therefore S=\frac{1}{2}(A'D'+B'C')\cdot A'B'=\frac{1}{2}\times(2+\frac{\sqrt{2}}{2})\times 2=2+\frac{\sqrt{2}}{2}$.



14. $(2,-2)$(答案不唯一)　设 $c=(x,y)$,$\because a\cdot c=x+2y$,$b\cdot c=-2x-y$,$\therefore x+2y=-2x-y$,$\therefore x+y=0$,不妨取 $c=(2,-2)$(答案不唯一).

15. 6　当 $n=1$ 时,$2a_1=3a_1-2$,$\therefore a_1=2$;当 $n\geqslant 2$ 时,$\because 2S_n=3a_n-2n$　①,

$\therefore 2S_{n-1}=3a_{n-1}-2(n-1)$　②,$\therefore$ ①−②整理得 $a_n=3a_{n-1}+2$,

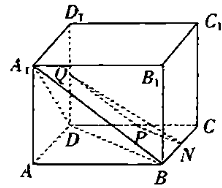
$\therefore a_n+1=3(a_{n-1}+1)$,$n\geqslant 2$. 又 $\because a_1+1=3\neq 0$,

$\therefore\{a_n+1\}$是以 3 为首项,3 为公比的等比数列,

$\therefore a_n+1=3\times 3^{n-1}=3^n$,$\therefore a_n=3^n-1$,令 $a_m=3^m-1>560$. $\because m\in\mathbf{N}^*$,解得 $m\geqslant 6$,

$\therefore$ 正整数 m 的最小值是 6.

16. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　取 CD 的中点 P,DD_1 的中点 Q,连接 PQ,PN,QN,如图所示.



$\because P$,N 分别为 CD,BC 的中点,$\therefore PN/\!/BD$,

同理,P,Q 分别为 CD,DD_1 的中点,$\therefore PQ/\!/D_1C/\!/A_1B$.

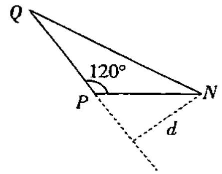
又 $\because PQ\cap PN=P$,PQ,$PN\subset$ 平面 PQN,$A_1B\cap BD=B$,A_1B,$BD\subset$ 平面 A_1BD,

$\therefore$ 平面 $PQN/\!/$ 平面 A_1BD,$\because MN/\!/$ 平面 A_1BD,

$\therefore MN\subset$ 平面 PQN,又点 M 在平面 DCC_1D_1 内运动,

$\therefore$ 点 M 在平面 PQN 和平面 DCC_1D_1 的交线上,即 $M\in PQ$.

在$\triangle PQN$ 中,$PN=\sqrt{2}$,$PQ=\frac{1}{2}CD_1=\sqrt{2}$,$QN=\sqrt{(\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{6}$,



$\therefore\cos\angle NPQ=\frac{PN^2+PQ^2-QN^2}{2PQ\times PN}=-\frac{1}{2}$,$\therefore\angle NPQ=120°$,

$\therefore N$ 点到 PQ 的最小距离 $d=PN\cdot\sin(180°-120°)=\frac{\sqrt{6}}{2}$,

$\therefore$ 线段 MN 的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

17. 解:(1)$\because BC/\!/AD$,$AD\perp$ 平面 ABP,$\therefore BC\perp$ 平面 ABP,

$\therefore BC\perp BP$,$\therefore\angle PBC=90°$,同理可得$\angle PDC=90°$,

$\therefore S_{表}=S_{底}+S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PDC}+S_{\triangle PAD}$

$=1\times\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times(1\times\sqrt{3}+1\times 2+\sqrt{2}\times\sqrt{3}+1\times 1)=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}$. ………………… 5 分

(2)$\because PA\perp$ 平面 $ABCD$,$CD\subset$ 平面 $ABCD$,$\therefore CD\perp PA$,

又四边形 $ABCD$ 是矩形,$\therefore CD\perp AD$,$\because PA\cap AD=A$,$\therefore CD\perp$ 平面 PAD.

$\because AF\subset$ 平面 PAD,$\therefore AF\perp CD$,$\because PA=AD$,点 F 是 PD 的中点,$\therefore AF\perp PD$.

又 $CD\cap PD=D$,$\therefore AF\perp$ 平面 PDC,$\because PE\subset$ 平面 PDC,$\therefore PE\perp AF$. ……………… 10 分

18. 解:(1)$\because a_{n+1}+a_n=2n+5$,

$\therefore a_{n+1}+a_{n+2}=2n+7$,且 $a_{n+2}-a_n=2$,

$\therefore \{a_n\}$的奇数项与偶数项各自成等差数列且公差均为 2.

$\because a_1=3$,则 $a_2=4$,

$\therefore a_{2n-1}=a_1+2(n-1)=2n+1=2n-1+2 \Rightarrow a_n=n+2$($n$ 为奇数);

$\therefore a_{2n}=a_2+2(n-1)=2n+2 \Rightarrow a_n=n+2$($n$ 为偶数).

综上可知,$a_n=n+2, n\in \mathbf{N}^*$. .... 6 分

(2)由(1)得 $b_n=\begin{cases}1, n=1\\ \log_{(n+1)}(n+2), n\geqslant 2, n\in \mathbf{N}^*\end{cases}$,

$\therefore b_1b_2b_3\cdots b_k=\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\cdots\cdot\log_{(k+1)}(k+2)=\log_3(k+2)=3$,解得 $k=25$. ...... 12 分

19. 解:(1)在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AA_1 /\!/ BB_1$,又 $BB_1 \not\subset$ 平面 ACC_1A_1,$AA_1\subset$平面 ACC_1A_1,所以 $BB_1 /\!/$ 平面 ACC_1A_1,又因为平面 $B_1BDE\cap$平面 $ACC_1A_1=DE$,所以 $BB_1 /\!/ DE$. .... 4 分

(2)选条件①②. 连接 A_1C、取 AC 的中点 O,连接 A_1O, BO.

在菱形 ACC_1A_1 中,$\angle A_1AC=60°$,所以$\triangle A_1AC$ 为等边三角形.

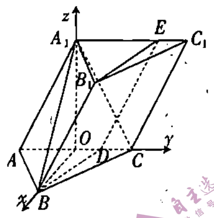
又因为 O 为 AC 的中点,所以 $A_1O\perp AC$,又因为平面 $ABC\perp$平面 ACC_1A_1,

平面 $ABC\cap$平面 $ACC_1A_1=AC$,$A_1O\subset$平面 ACC_1A_1,且 $A_1O\perp AC$;

所以 $A_1O\perp$平面 ABC,又 $OB\subset$平面 ABC,所以 $A_1O\perp OB$.

又因为 $AB=BC$,所以 $BO\perp AC$.

以 O 为原点,以 OB,OC,OA_1 为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系,



则 $O(0,0,0)$,$A(0,-2,0)$,$A_1(0,0,2\sqrt{3})$,$B(3,0,0)$,$D(0,1,0)$.

所以$\overrightarrow{BD}=(-3,1,0)$,$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AA_1}=(0,2,2\sqrt{3})$.

设平面 B_1BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0\end{cases}$,所以$\begin{cases}-3x_1+y_1=0\\ 2y_1+2\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$,

令 $z_1=-\sqrt{3}$,则 $y_1=3$,$x_1=1$,故 $\boldsymbol{n}=(1,3,-\sqrt{3})$.

又因为$\overrightarrow{AB}=(3,2,0)$,设直线 AB 与平面 B_1BDE 所成的角为 θ,

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AB},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AB}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{9}{13}$,所以直线 AB 与平面 B_1BDE 所成角的正弦值为$\dfrac{9}{13}$. .... 12 分

选条件②③. 连接 A_1C,取 AC 的中点 O,连接 A_1O, BO.

在菱形 ACC_1A_1 中,$\angle A_1AC=60°$,所以$\triangle A_1AC$ 为等边三角形.

又 O 为 AC 的中点,故 $A_1O\perp AC$,且 $A_1O=2\sqrt{3}$,又因为 $OB=3$,$A_1B=\sqrt{21}$,

所以 $A_1O^2+OB^2=A_1B^2$,所以 $A_1O\perp OB$.

又因为 $AC\cap OB=O$,所以 $A_1O\perp$平面 ABC.

以下同选①②. .... 12 分

选条件①③. 取 AC 的中点 O,连接 BO、A_1O.

在$\triangle ABC$ 中,因为 $BA=BC$,所以 $BO\perp AC$,且 $AO=2$,$OB=3$.

又因为平面 $ABC\perp$平面 ACC_1A_1,平面 $ABC\cap$平面 $ACC_1A_1=AC$,

所以 $BO\perp$平面 ACC_1A_1. 因为 $OA_1\subset$平面 ACC_1A_1,所以 $BO\perp OA_1$.

在 Rt$\triangle BOA_1$ 中,$OA_1=2\sqrt{3}$,又因为 $OA=2$,$AA_1=4$,

所以 $OA_1^2+OA^2=AA_1^2$,所以 $A_1O\perp AO$.

以下同选①②. .... 12 分

20. 解:(1)因为$\triangle ABC$ 是正三角形,点 E 是 BC 的中点,所以 $AE\perp BC$.

又因为平面 $ABC\perp$平面 BCD,平面 $ABC\cap$平面 $BCD=BC$,$AE\subset$平面 ABC,

所以 $AE\perp$平面 BCD,又因为 $CD\subset$平面 BCD,所以 $CD\perp AE$.

因为点 E,F 分别是 BC,CD 的中点,所以 $EF /\!/ BD$,

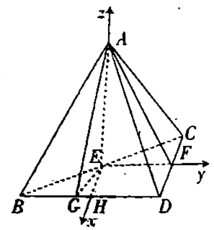
又因为 $BD\perp CD$,所以 $CD\perp EF$,又因为 $CD\perp AE$,$AE\cap EF=E$,

$AE\subset$平面 AEF,$EF\subset$平面 AEF,所以 $CD\perp$平面 AEF. .... 5 分

(2)在平面 BCD 中,过点 E 作 $EH\perp BD$,垂足为 H,

设 $BC=4$,则 $EA=2\sqrt{3}$,$DF=FC=1$,$EF=\sqrt{3}$.

以$\{\overrightarrow{EH},\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EA}\}$为正交基底,建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$,



则 $E(0,0,0)$,$A(0,0,2\sqrt{3})$,$C(-1,\sqrt{3},0)$,$D(1,\sqrt{3},0)$

设 $G(1,y,0)$,则$\overrightarrow{EA}=(0,0,2\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AD}=(1,\sqrt{3},-2\sqrt{3})$,$\overrightarrow{CD}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{EG}=(1,y,0)$.

设平面 AEG 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{EA}=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{EG}=0\end{cases}$,得$\begin{cases}2\sqrt{3}z_1=0\\ x_1+yy_1=0\end{cases}$,令 $y_1=-1$,故 $\boldsymbol{n}_1=(y,-1,0)$,

设平面 ACD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CD}=0\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$,即$\begin{cases}2x_2=0\\ x_2+\sqrt{3}y_2-2\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$,令 $z_2=1$,则 $\boldsymbol{n}_2=(0,2,1)$.

设平面 AEG 与平面 ACD 所成锐二面角的平面角为 θ,

所以 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\left|\dfrac{-2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{y^2+1}}\right|=\dfrac{2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{y^2+1}}$,当 $y=0$ 时,$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,此时最大,

故当 G 为 BD 的中点时,平面 AEG 与平面 ACD 所成锐二面角的余弦值最大. ...... 12 分

21. 解：(1)如图所示：

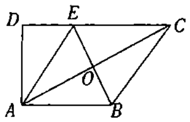


图 1

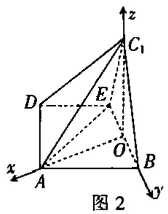


图 2

在图 1 中，连接 AC，交 BE 于 O，因为四边形 $ABCE$ 是边长为 2 的菱形，并且$\angle BCE=60°$，所以 $AC\perp BE$，且 $OA=OC=\sqrt{3}$.

在图 2 中，相交直线 OA,OC_1 均与 BE 垂直，所以$\angle AOC_1$ 是二面角 $A-BE-C_1$ 的平面角，因为 $AC_1=\sqrt{6}$，所以 $OA^2+OC_1^2=AC_1^2$，$OA\perp OC_1$，所以平面 $BC_1E\perp$平面 $ABED$. …… 5 分

(2)由(1)知，分别以 OA,OB,OC_1 为 x,y,z 轴建立如图 2 所示的空间直角坐标系，

则 $D(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0)$，$C_1(0,0,\sqrt{3})$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,1,0)$，$E(0,-1,0)$，

$\overrightarrow{DC_1}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AD}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0)$，$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{AC_1}=(-\sqrt{3},0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AE}=(-\sqrt{3},-1,0)$. 设$\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DC_1}$，$\lambda\in[0,1]$，

则$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{DC_1}=(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\lambda,\sqrt{3}\lambda)$.

设平面 ABC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$

则$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0\\ -\sqrt{3}x+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，取 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},1)$，

因为点 P 到平面 ABC_1 的距离为$\frac{\sqrt{15}}{5}$，

所以 $d=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\lambda|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，

则$\overrightarrow{AP}=(-\frac{3\sqrt{3}}{4},-\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{2})$，所以$\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AE}=(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

设直线 EP 与平面 ABC_1 所成的角为 θ，

所以直线 EP 与平面 ABC_1 所成角的正弦值为 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EP},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{EP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{EP}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

…………………………………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)设 $h(x)=f(x)-g(x)$，

$\therefore h'(x)=\frac{2}{x}-1+\frac{3}{x^2}=\frac{2x+3-x^2}{x^2}=\frac{(-x+3)(x+1)}{x^2}(x>0)$，

$\therefore$当 $x\in(0,3)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增；

当 $x\in(3,+\infty)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减.

$\therefore h(x)$的最大值为 $h(3)=2\ln 3-3=2(\ln 3-\frac{3}{2})<0$，$\therefore f(x)<g(x)$. …………… 4 分

(2)令 $F(x)=e^x-2\ln x-4$，则 $F'(x)=e^x-\frac{2}{x}$. 令 $t(x)=F'(x)=e^x-\frac{2}{x}$，

又由 $t'(x)=e^x+\frac{2}{x^2}>0$，得 $t(x)=F'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

又$\because t(\frac{1}{2})<0$，$t(1)>0$，$\therefore$存在 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使 $t(x_0)=0$，即 $e^{x_0}=\frac{2}{x_0}$，

$\therefore F(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，

$\therefore F(x)_{\min}=F(x_0)=e^{x_0}-2\ln x_0-4=\frac{2}{x_0}-2\ln x_0-4=2(\frac{1}{x_0}+x_0)-2\ln 2-4$.

由 $y=\frac{1}{x_0}+x_0$ 在$(\frac{1}{2},1)$上单调递减，得 $F(x_0)=2(\frac{1}{x_0}+x_0)-2\ln 2-4<1-2\ln 2<0$.

又 $F(2)=e^2-2\ln 2-4>0$，$F(1)=e^1-2\ln 1-4<0$，

$\therefore 1<x_2<2$，$\therefore F(e^{-2})=e^{e^{-2}}-2\ln e^{-2}-4=e^{e^{-2}}>0$，$\therefore\frac{1}{e^2}<x_1<1$.

综上可知，$\frac{1}{e^2}<x_1<1<x_2<2$ …………………………………………………… 12 分