长沙市一中 2023 届高三月考试卷(六)

数学参考答案

一、单项选择题

1	2	3	4	5	6	7	8
A	B	C	C	C	D	A	B

二、多项选择题

9	10	11	12
ACD	BD	ABD	AC

三、填空题

13. -2　　14. 20　　15. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　16. $\frac{16}{3}\pi+2\sqrt{3}$

四、解答题

17. **【解析】** (1) $\because 1+a_n$ 是 4 与 S_n 的等比中项，

$\therefore (1+a_n)^2=4S_n$ ①，

当 $n=1$ 时，$(1+a_1)^2=4S_1=4a_1$，

$\therefore a_1=1$.

当 $n\geq 2$ 时，$(1+a_{n-1})^2=4S_{n-1}$ ②，

由①-②得，$(1+a_n)^2-(1+a_{n-1})^2=4(S_n-S_{n-1})=4a_n$，

$\therefore (a_n-a_{n-1}-2)(a_n+a_{n-1})=0$，

$\because a_n>0$，

$\therefore a_n-a_{n-1}=2$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是首项为1，公差为 2 的等差数列.

$\therefore \{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=2n-1$.

(2)由(1)得 $\frac{1}{a_1^2}=1$，

当 $n\geq 2$ 时，$\frac{1}{a_n^2}=\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{4n^2-4n+1}<\frac{1}{4n^2-4n}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$，

$\therefore \frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}=1+\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}$

$<1+\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right]=1+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{5}{4}-\frac{1}{4n}<\frac{5}{4}$.

18.【解析】(1)由题意知 $\triangle ABC$ 中，$a\cos C+\sqrt{3}a\sin C=b+c$，

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得

$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin B+\sin C=\sin(A+C)+\sin C=\sin A\cos C+\cos A\sin C+\sin C$，

$\therefore \sqrt{3}\sin A\sin C=\cos A\sin C+\sin C$，

$\because C\in(0,\pi)$，

$\therefore \sin C\neq 0$，

$\therefore \sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，

$\therefore 2\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=1$，

$\therefore \sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，

又 $A\in(0,\pi)$，$A-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

所以 $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，

即 $A=\frac{\pi}{3}$.

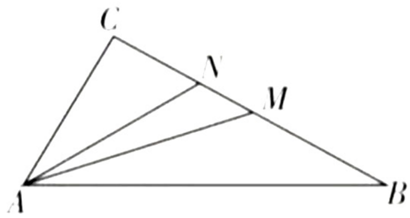
(2)如下图所示，在 $\triangle ABC$ 中，AM 为中线，

$\therefore 2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，

$\therefore 4\left|\overrightarrow{AM}\right|^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=c^2+b^2+bc$，

$\therefore b^2+c^2+bc=12$.

$\because S_{\triangle ABC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，



$\therefore \dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，$bc=3$，

$\therefore b+c=\sqrt{b^2+2bc+c^2}=\sqrt{15}$，

$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABN}+S_{\triangle ACN}$，

$\therefore \dfrac{3\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{2}(b+c)AN\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}AN$，

$\therefore AN=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

19.【解析】(1)设甲答对题目的个数为X，由题意，得$X\sim B(3,p)$，

则甲被录用的概率为$P_1=C_3^2p^2(1-p)+p^3=3p^2-2p^3$，

乙被录用的概率为$P_2=p^2$.

(2)ξ的可能取值为0，1，2，

则$P(\xi=0)=(1-P_1)(1-P_2)$，

$P(\xi=1)=P_1(1-P_2)+(1-P_1)P_2$，$P(\xi=2)=P_1P_2$，

$\therefore E(\xi)=0\times(1-P_1)(1-P_2)+1\times\left[P_1(1-P_2)+(1-P_1)P_2\right]+2\times P_1P_2$

$=P_1+P_2=3p^2-2p^3+p^2=4p^2-2p^3$，

设$f(p)=4p^2-2p^3(0<p<1)$，

则$f'(p)=8p-6p^2=2p(4-3p)>0$.

$\therefore$当$0<p<1$时，$f(p)$为增函数.

又$f(0)=0$，$f(1)=2$，

所以存在唯一的P的值p_0，使得$f(p_0)=1.5$，

即$E(\xi)=1.5$.

20.【解析】(1)分别取AB，CD的中点E，F，连接PE，EF，PF，

$\because PA=PB$，E为AB的中点，

$\therefore PE \perp AB$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，则 $AB // CD$ 且 $AB = CD$，

$\therefore CD \perp PE$.

$\because E$，F 分别为 AB，CD 的中点，

$\therefore EF // AD$，

$\therefore EF \perp CD$，

$\because EF \cap PE = E$，

$\therefore CD \perp$ 平面 PEF.

$\because PF \subset$ 平面 PEF，

$\therefore CD \perp PF$.

在 $\triangle PCD$ 中，

$\because F$ 为 CD 的中点，$CD \perp PF$，

$\therefore PC = PD$.

又 $\because PA = PB$，$AD = BC$，

$\therefore \triangle PAD \cong \triangle PBC$，

从而可得 $\angle PAD = \angle PBC$.

(2)由(1)可知 $PE \perp AB$，$EF \perp AB$，

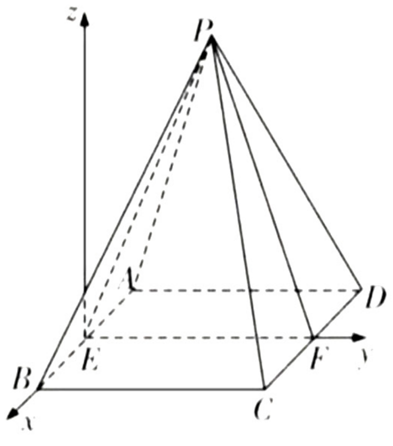
$\therefore \angle PEF$ 为二面角 $P-AB-C$ 的平面角，且 $PE = \sqrt{PA^2 - AE^2} = \sqrt{3}$，

以点 E 为坐标原点，EB，EF 所在直线分别为 x，y 轴建立如下图所示的空间直角坐标系，

设 $\angle PEF = \alpha$，其中 $0 < \alpha < \pi$，

则 $A(-1,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$D(-1,2,0)$，$F(0,2,0)$，$P(0,\sqrt{3}\cos\alpha,\sqrt{3}\sin\alpha)$，

$\overrightarrow{AP} = (1,\sqrt{3}\cos\alpha,\sqrt{3}\sin\alpha)$，$\overrightarrow{DC} = (2,0,0)$，$\overrightarrow{FP} = (0,\sqrt{3}\cos\alpha - 2,\sqrt{3}\sin\alpha)$，



设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x,y,z)$，

由 $\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{DC} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{FP} = 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} 2x = 0, \\ (\sqrt{3}\cos\alpha - 2)y + \sqrt{3}\sin\alpha \cdot z = 0, \end{cases}$

取 $y = \sqrt{3}\sin\alpha$，

则 $z = 2 - \sqrt{3}\cos\alpha$，$x = 0$，

$\therefore \boldsymbol{n}=\left(0,\sqrt{3}\sin\alpha,2-\sqrt{3}\cos\alpha\right)$.

$$\left|\cos\left\langle \boldsymbol{n},\vec{AP}\right\rangle\right|=\frac{\left|\boldsymbol{n}\cdot\vec{AP}\right|}{|\boldsymbol{n}|\cdot\left|\vec{AP}\right|}=\frac{2\sqrt{3}|\sin\alpha|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\sin\alpha\right)^2+\left(2-\sqrt{3}\cos\alpha\right)^2}\times 2}=\sqrt{3}\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{7-4\sqrt{3}\cos\alpha}}$$

$$=\sqrt{3}\sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{7-4\sqrt{3}\cos\alpha}}.$$

令 $7-4\sqrt{3}\cos\alpha=t\in\left(7-4\sqrt{3},7+4\sqrt{3}\right)$,

则 $\cos\alpha=\dfrac{7-t}{4\sqrt{3}}$,

则 $\left|\cos\left\langle \boldsymbol{n},\vec{AP}\right\rangle\right|=\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{1-\left(\dfrac{7-t}{4\sqrt{3}}\right)^2}{t}}=\dfrac{1}{4}\sqrt{14-\left(t+\dfrac{1}{t}\right)}\le\dfrac{1}{4}\sqrt{14-2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

当且仅当 $t=1$ 时，即当 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，即当 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ 时，等号成立.

所以当直线 PA 与平面 PCD 所成角的正弦值最大时，二面角 $P-AB-C$ 为 $\dfrac{\pi}{6}$.

21.【解析】(1)圆 $C:(x-1)^2+y^2=16$，圆心为 $(1,0)$，半径为 4，

因为线段 BF 的垂直平分线交 BC 于 P 点，所以 $|PB|=|PF|$，

所以 $|PC|+|PF|=|PC|+|PB|=|BC|=4>|FC|=2$，

所以由椭圆定义知，P 的轨迹是以 C，F 为焦点的椭圆，方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2)设直线 l 的方程为 $x=my+t\,(m\neq 0)$.

联立 $\begin{cases}x=my+t,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}\Rightarrow\left(3m^2+4\right)y^2+6mt\cdot y+3t^2-12=0$,

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $B'(x_2,-y_2)$，

则 $y_1+y_2=\dfrac{-6mt}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{3t^2-12}{3m^2+4}$，

直线 AB' 的方程为 $y-y_1=\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$，

令 $y=0 \Rightarrow x_N=\dfrac{x_2y_1+x_1y_2}{y_1+y_2}=\dfrac{2my_1y_2+t\left(y_1+y_2\right)}{y_1+y_2}=2m\cdot\dfrac{y_1y_2}{y_1+y_2}+t=\dfrac{4}{t}$，

$\therefore \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=t\cdot\dfrac{4}{t}=4$.

即 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 为定值 4.

22.【解析】(1) 令 $g(x)=f(x)-x$，当 $a=1$ 时，$g(x)=\dfrac{e^{x-1}}{x}+\ln x-x$，

则 $g'(x)=\dfrac{e^{x-1}(x-1)}{x^2}+\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{(x-1)\left(e^{x-1}-x\right)}{x^2}$，

设 $h(x)=e^{x-1}-x \Rightarrow h'(x)=e^{x-1}-1$，

$h'(1)=0$ 且 $h'(x)$ 单调递增，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore h(x)\geq h(1)=0$，

令 $g'(x)>0 \Rightarrow x>1$.

$\therefore g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,1)$ 上单调递减.

$\therefore g(x)_{\min}=g(1)=0$.

(2) $\dfrac{f(x)}{x}$ 的最小值为 a，即 $f(x)\geq ax$ 恒成立，且等号可取，

$\dfrac{e^{ax-1}}{x}+\ln x\geq ax \Leftrightarrow e^{ax-\ln x-1}+\ln x\geq(ax-\ln x-1)+1+\ln x$，

即 $e^{ax-\ln x-1}\geq(ax-\ln x-1)+1$，而 $e^x\geq x+1$ 恒成立，等号当且仅当 $x=0$ 时取得，

故 $ax-\ln x-1=0$ 时，等号成立.

故 $a=\dfrac{1+\ln x}{x}$ 有解，

令 $\varphi(x)=\dfrac{1+\ln x}{x} \Rightarrow \varphi'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$，

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

故 $\varphi(x)_{\max}=\varphi(1)=1$.

即 a 的最大值为 1.