娄底市 2023 届高考仿真模拟考试

数学参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8
答 案	C	A	D	C	A	D	B	D

1. C 【解析】$z=\frac{4-2i}{1+i}=\frac{(4-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2-6i}{2}=1-3i$，则 $\bar{z}=1+3i$，故 $\bar{z}$ 对应的点为 $(1,3)$. 故选 C.

2. A 【解析】$\complement_A B=(1,3]$. 故选 A.

3. D 【解析】将点 $M(m,2\sqrt{p})$ 代入抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 中，得 $(2\sqrt{p})^2=2pm$，解得 $m=2$.

又由抛物线上点 $M(2,2\sqrt{p})$ 到其焦点的距离为 4，

则 $2-\left(-\frac{p}{2}\right)=4$，解得 $p=4$. 故选 D.

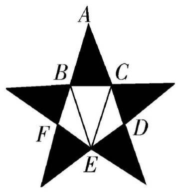
4. C 【解析】$x=\ln\frac{1}{1.1}<0$，$1=\log_{1.1}1.1<y=\log_{1.1}1.2<\log_{1.1}1.21=\log_{1.1}(1.1)^2=2$，$z=2^{1.1}>2$，所以 $x<y<z$. 故选 C.

5. A 【解析】由 $N(90,20^2)$，知 $\mu=90$，$\sigma=20$，则 $P(50<X<130)\approx0.9545$，$P(30<X<150)\approx0.9973$，

所以 $P(130<X<150)=\frac{P(30<X<150)-P(50<X<130)}{2}\approx\frac{0.9973-0.9545}{2}=0.0214$，

所以估计数学单科分数在 130～150 分的学生人数为 $50000\times0.0214=1070$. 故选 A.

6. D 【解析】如图，设正五边形的另外三个顶点为 D,E,F，连接 BE,CE，



由对称性知四边形 $ABEC$ 为菱形，

$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCE}$，$S_{\triangle CDE}=S_{\triangle BFE}=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot BF\sin 36^\circ$，

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\sin 36^\circ$，

$\therefore S_{白}=\left(1+2\cdot\frac{BC}{AB}\right)S_{\triangle ABC}=\sqrt{5}S_{\triangle ABC}$，

$\therefore\frac{S_{阴}}{S_{白}}=\frac{5S_{\triangle ABC}}{\sqrt{5}S_{\triangle ABC}}=\sqrt{5}$，故选 D.

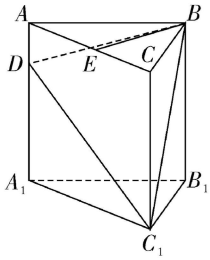
7. B 【解析】$f'(x)=\frac{1}{2}\times\frac{a}{\sqrt{30+ax}(2+a)}=\frac{a}{2(a+2)\sqrt{30+ax}}$，

由题意，$f'(x)=\frac{a}{2(a+2)\sqrt{30+ax}}\geqslant0$ 在 $[-10,-3]$ 上恒成立，

则 $\frac{a}{2(a+2)}>0$，解得 $a<-2$ 或 $a>0$，且满足 $\begin{cases}30+a\times(-10)\geqslant0,\\30+a\times(-3)\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $a\leqslant3$.

综上，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-2)\cup(0,3]$. 故选 B.

8. D 【解析】取 AC 的中点 E，连接 BE，



由题意知，$\triangle ABC$ 为等边三角形，则 $BE\perp AC$，
因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC，所以 $AA_1\perp BE$，
又 $AC\cap AA_1=A$，所以 $BE\perp$ 平面 ACC_1A_1.

不妨设 $AA_1=4$，则 $AC=CC_1=4$，$AD=1$，$BE=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，

所以 $S_{梯形ACC_1D}=\frac{1}{2}\times(1+4)\times4=10$，$V_{四棱锥B\text{-}ACC_1D}=\frac{1}{3}S_{梯形ACC_1D}\cdot BE=\frac{1}{3}\times10\times2\sqrt{3}=\frac{20\sqrt{3}}{3}$，

$V_{ABC\text{-}A_1B_1C_1}=S_{\triangle ABC}\cdot AA_1=\frac{1}{2}\times4\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times4=16\sqrt{3}$，

所以$\frac{V_{四棱锥B\text{-}ACC_1D}}{V_{ABC\text{-}A_1B_1C_1}-V_{四棱锥B\text{-}ACC_1D}}=\frac{\frac{20\sqrt{3}}{3}}{16\sqrt{3}-\frac{20\sqrt{3}}{3}}=\frac{5}{7}$，

即截面 BDC_1 分棱柱的两部分的体积比为 5∶7. 故选 D.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

题 号	9	10	11	12
答 案	AD	AC	BD	BD

9. AD 【解析】A 中，PQ，RS 都与正方体的面对角线平行，所以 $PQ/\!/RS$；
B 中，PQ，RS 相交；
C 中，PQ，RS 异面；
D 中，显然 $PQ/\!/RS$.
故选 AD.

10. AC 【解析】第一季度用电量为 160 度，第一季度占总用电量的百分比为 16%，可得年总用电量为 1000 度，第二季度占总用电量的百分比为 26%，可得第二季度的用电量为 260 度，故 A 正确；
2022 年下半年占总用电量的百分比为 30%+28%=58%，所以 2022 年下半年的总用电量为 580 度. 故 B 错误；
2022 年 11 月占总用电量的百分比为 28%−12%−6%=10%，所以 2022 年 11 月的用电量为 1000×10%=100 度. 故 C 正确；
2022 年 12 个月的月用电量分别是 50，50，60，60，90，110，80，100，120，120，100，60，从小至大依次为 50，50，60，60，60，80，90，100，100，110，120，120，中位数为$\frac{80+90}{2}=85$ 度，故 D 错误. 故选 AC.

11. BD 【解析】圆 N：$x^2+y^2+2y-8=0$ 化为标准方程是 $x^2+(y+1)^2=9$，圆心为 $N(0,-1)$，$R=3$，则 A 错误；
圆 M：$x^2+y^2-6y+5=0$ 化为标准方程是 $x^2+(y-3)^2=4$，圆心为 $M(0,3)$，$r=2$，
因为 $3-2<|MN|=4<3+2$，所以圆 M 与圆 N 相交. 故 B 正确；
当圆 M 与直线 l 相切时，圆心 $M(0,3)$ 到直线 l：$3x-4y+m=0$ 的距离为 $r=2$，即$\frac{|-4\times3+m|}{5}=2$，解得 $m=22$ 或 $m=2$，故 C 错误；

当 $m=7$ 时，圆心 $M(0,3)$ 到直线 $l:3x-4y+7=0$ 的距离为 $d=\frac{|-4\times3+7|}{5}=1$，则圆 M 与直线 l 相交所得的弦长为 $l=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{2^2-1^2}=2\sqrt{3}$，故 D 正确. 故选 BD.

12. BD 【解析】对 A，$a_1=1\times2$，故 A 错误；

对 B，$a_n=1\times2+1\times2^2+\cdots+1\times2^n+2\times2^2+2\times2^3+\cdots+2\times2^n+2^2\times2^3+2^2\times2^4+\cdots+2^2\times2^n+\cdots+2^{n-1}\times2^n=(2+2^2+\cdots+2^n)+(2^3+2^4+\cdots+2^{n+1})+(2^5+2^6+\cdots+2^{n+2})+(2^7+2^8+\cdots+2^{n+3})+\cdots+2^{2n-1}$

$=\frac{2(1-2^n)}{1-2}+\frac{2^3(1-2^{n-1})}{1-2}+\frac{2^5(1-2^{n-2})}{1-2}+\frac{2^7(1-2^{n-3})}{1-2}+\cdots+\frac{2^{2n-1}(1-2^1)}{1-2}$

$=(2^{n+1}-2)+(2^{n+2}-2^3)+(2^{n+3}-2^5)+(2^{n+4}-2^7)+\cdots+(2^{2n}-2^{2n-1})$

$=\frac{2^{n+1}(1-2^n)}{1-2}-\frac{2(1-4^n)}{1-4}=2^{2n+1}-2^{n+1}-\frac{2}{3}\cdot2^{2n}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\cdot2^{2n}-2^{n+1}+\frac{2}{3}$，故 B 正确；

对 C，由 $a_n=\frac{4}{3}\cdot2^{2n}-2^{n+1}+\frac{2}{3}$，得 $a_2=14,a_3=70$，显然 $\frac{a_2}{a_1}\neq\frac{a_3}{a_2}$，所以 $\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 不是等比数列，故 C 错误；

对 D，由 $a_n=\frac{4}{3}\cdot2^{2n}-2^{n+1}+\frac{2}{3}$，得 $S_n=\frac{4}{3}\cdot\frac{4(1-4^n)}{1-4}-\frac{4(1-2^n)}{1-2}+\frac{2}{3}n=\frac{4^{n+2}}{9}-2^{n+2}+\frac{2}{3}n+\frac{20}{9}$. 故 D 正确.

故选 BD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\frac{\sqrt{10}}{3}$ 【解析】因为 $a=3b$，所以离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{(3b)^2+b^2}}{3b}=\frac{\sqrt{10}b}{3b}=\frac{\sqrt{10}}{3}$.

14. $f(x)=\log_2x+1$(答案不唯一) 【解析】由在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增联想到对数函数，可知 $f(x)-1$ 为底数大于 1 的对数函数，且 $f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)-1$，则 $f(x)$ 的一个解析式可以为 $f(x)=\log_2x+1$.

15. $\frac{1}{2}$ 【解析】因为 $(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，所以 $(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=0$，因为 $|\boldsymbol{a}|=2,|\boldsymbol{b}|=3$，

所以 $3\times2\times3\times\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle-3^2=0$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{1}{2}$.

16. $-4\mathrm{e}$ 【解析】设直线 l 与曲线相切的切点为 (x_0,y_0)，$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{n}$，则直线 l 的斜率为 $f'(x_0)=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{n}$，

于是得 $\frac{1}{x_0}-\frac{1}{n}=4$，即 $\frac{1}{n}=\frac{1}{x_0}-4$，由 $\begin{cases}y_0=4x_0+3,\\ y_0=\ln x_0-\frac{x_0}{n}+\ln m+3,\end{cases}$ 得 $\ln x_0-\frac{x_0}{n}+\ln m=4x_0$，又 $\frac{x_0}{n}+4x_0=1$，

于是得 $\ln m+\ln x_0=1$，即 $m=\frac{\mathrm{e}}{x_0}$. 因为 $m>1$，则 $0<x_0<\mathrm{e}$，

则 $\frac{m}{n}=\frac{\mathrm{e}}{x_0}\left(\frac{1}{x_0}-4\right)=\mathrm{e}\left[\left(\frac{1}{x_0}-2\right)^2-4\right]\geqslant-4\mathrm{e}$，

当且仅当 $x_0=\frac{1}{2}$ 时取等号，所以 $\frac{m}{n}$ 的最小值为 $-4\mathrm{e}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】(1) 由题意，男生喜欢观看的人数为 $6+7+8+8+6+5+14+14+12+10=90$，………………(2 分)

女生喜欢观看的人数为 $4+4+4+5+5+6+7+7+8+10=60$，………………………………………………(4 分)

所以可得列联表：

	喜欢观看	不喜欢观看	合计
男生	90	60	150
女生	60	90	150
合计	150	150	300

……………………………………………………………………………………………………(6 分)

(2)零假设为 H_0:该校学生喜欢观看世界杯与性别无关,

由题可得 $\chi^2=\dfrac{300\times(90\times90-60\times60)^2}{150\times150\times150\times150}=12>10.828=x_{0.001}$, ……………………………………(8分)

所以依据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验,推断 H_0 不成立,即能认为该校学生喜欢观看世界杯与性别有关. ……………………………………(10分)

18.【解析】(1)由 $\cos C=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,得 $\sin C=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, ……………………………………(2分)

由 $\cos A=\dfrac{1}{3}$,得 $\sin A=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, ……………………………………(4分)

所以 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$. ……………………(6分)

(2)由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$,即 $\dfrac{2\sqrt{6}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\dfrac{c}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{b}{\frac{5\sqrt{3}}{9}}$, ……………………………………(8分)

解得 $c=3,b=5$. ……………………………………(10分)

所以△ABC 的周长为 $a+b+c=2\sqrt{6}+5+3=8+2\sqrt{6}$. ……………………………………(12分)

19.【解析】(1)当 $n=1$ 时,$a_1^2-2a_1=3-4S_1=3-4a_1$,解得 $a_1=-3$ 或 $a_1=1$(舍),…………(2分)

当 $n=2$ 时,$a_2^2-2a_2=3-4S_2=3-4(a_1+a_2)$,解得 $a_2=-5$ 或 $a_2=3$(舍). ……………(4分)

(2)当 $n\geqslant2$ 时,$a_n^2-2a_n=3-4S_n$ ①,

$a_{n-1}^2-2a_{n-1}=3-4S_{n-1}$ ②, ……………………………………(6分)

由①-②得,$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}+2)=0$,

因为 $a_n<0$,所以 $a_n-a_{n-1}=-2$, ……………………………………(8分)

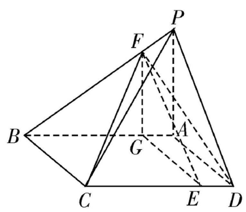
又 $a_2-a_1=-2$,

所以数列$\{a_n\}$是以 -3 为首项,-2 为公差的等差数列, ……………………………………(10分)

所以 $a_n=-3+(n-1)\times(-2)=-2n-1$,

即数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=-2n-1$. ……………………………………(12分)

20.【解析】(1)证明:在线段 AB 上取点 G,使得 $AG=\dfrac{1}{4}AB$,连接 EG,FG,如下图所示,



则 $\dfrac{BG}{BA}=\dfrac{BF}{BP}=\dfrac{CE}{CD}=\dfrac{3}{4}$, ……………………………………(1分)

所以 $GF/\!/PA,GE/\!/AD$, ……………………………………(2分)

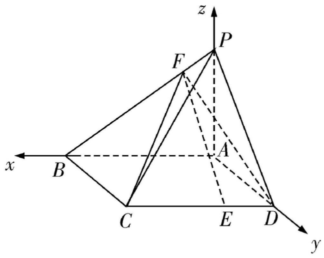
因为 $GF\not\subset$平面 PAD,$PA\subset$平面 PAD,$GE\not\subset$平面 PAD,$AD\subset$平面 PAD,

所以 $GF/\!/$平面 PAD,$GE/\!/$平面 PAD, ……………………………………(4分)

又 $GF\cap GE=G$,所以平面 $FGE/\!/$平面 PAD,

又 $EF\subset$平面 FGE,所以 $EF/\!/$平面 PAD. ……………………………………(6分)

(2)由题意知,AB,AD,AP 两两互相垂直,以 A 为原点,AB,AD,AP 所在直线分别为 x,y,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$,



因为 $P(0,0,4),C(4,4,0),D(0,4,0),F(1,0,3)$,

所以 $\overrightarrow{PC}=(4,4,-4),\overrightarrow{CD}=(-4,0,0),\overrightarrow{CF}=(-3,-4,3)$, ……………………………………………………（8 分）

设平面 CDF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=(x,y,z)\cdot(-4,0,0)=-4x=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CF}=(x,y,z)\cdot(-3,-4,3)=-3x-4y+3z=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0,\\ y=\dfrac{3}{4}z,\end{cases}$

令 $z=4$,得平面 CDF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,3,4)$. ……………………………………………………（10 分）

设直线 PC 与平面 CDF 所成的角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PC},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{PC}||\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\dfrac{(4,4,-4)\cdot(0,3,4)}{4\sqrt{3}\times5}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{15}$.

故直线 PC 与平面 CDF 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{15}$. ……………………………………………………（12 分）

21.【解析】(1)因为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点分别为 $A(-2\sqrt{2},0),B(2\sqrt{2},0)$,

所以 $a=2\sqrt{2}$. ……………………………………………………（1 分）

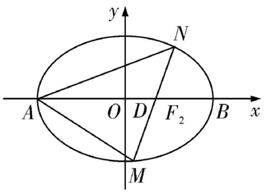
因为 $|DF_2|=2-\sqrt{2}$,D 在 F_2 的左方,

所以 $c-\dfrac{1}{2}a=2-\sqrt{2}$,解得 $c=2$, ……………………………………………………（2 分）

则 $b=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-2^2}=2$, ……………………………………………………（3 分）

所以椭圆 C 的标准方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$. ……………………………………………………（4 分）

(2)由题意设直线 $MN:x=my+\sqrt{2}$,$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2),A(-2\sqrt{2},0)$, ……………………………（5 分）



联立$\begin{cases}x=my+\sqrt{2},\\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1,\end{cases}$消去 x,得$(m^2+2)y^2+2\sqrt{2}my-6=0$, ……………………………（6 分）

则 $y_1+y_2=-\dfrac{2\sqrt{2}m}{m^2+2},y_1y_2=-\dfrac{6}{m^2+2}$, ……………………………………………………（7 分）

所以 $k_1\cdot k_2=\dfrac{y_1}{x_1+2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{y_2}{x_2+2\sqrt{2}}=\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2+2\sqrt{2}(x_1+x_2)+8}$

$=\dfrac{y_1y_2}{(my_1+\sqrt{2})(my_2+\sqrt{2})+2\sqrt{2}(my_1+\sqrt{2}+my_2+\sqrt{2})+8}$

$=\dfrac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+3\sqrt{2}m(y_1+y_2)+18}$

$$=\frac{-\frac{6}{m^2+2}}{m^2\left(-\frac{6}{m^2+2}\right)+3\sqrt{2}m\left(-\frac{2\sqrt{2}m}{m^2+2}\right)+18}$$

$$=\frac{-6}{-6m^2-12m^2+18m^2+36}=-\frac{1}{6}.$$

所以 $k_1\cdot k_2$ 为定值 $-\frac{1}{6}$. ……（12 分）

22.【解析】(1)证明：$f'(x)=e^x+2kx-1$，

令 $\varphi(x)=f'(x)$，则 $\varphi'(x)=e^x+2k$， ……（1 分）

因为 $k\geqslant 0$，所以 $\varphi'(x)>0$ 恒成立， ……（2 分）

所以 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增， ……（3 分）

所以当 $x\geqslant 0$ 时，$f'(x)\geqslant f'(0)=0$，

故函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增. ……（4 分）

(2)方程 $f(x)=g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有且仅有 1 个实数根. ……（5 分）

证明如下：

$f(x)=g(x)$ 即为 $e^x+kx^2-x=xe^x-x$，即 $(x-1)e^x-kx^2=0$，

令 $h(x)=(x-1)e^x-kx^2$，则 $h'(x)=x(e^x-2k)$，

因为当 $x<1$ 时，$h(x)<0$，则 $h(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上无零点，

所以只需证明 $h(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上有且只有一个零点. ……（6 分）

①若 $k\in\left[0,\frac{e}{2}\right]$，

当 $x\geqslant 1$ 时，$h'(x)\geqslant 0$，则 $h(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

又因为 $h(1)=-k\leqslant 0$，$h(2)=e^2-4k\geqslant e^2-2e>0$，

所以 $h(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上有且只有一个零点； ……（8 分）

②若 $k\in\left(\frac{e}{2},+\infty\right)$，$h'(x)>0\Rightarrow x>\ln 2k$，$h'(x)<0\Rightarrow 1\leqslant x<\ln 2k$，

所以 $h(x)$ 在区间 $[1,\ln 2k)$ 上单调递减，$(\ln 2k,+\infty)$ 上单调递增，

又因为 $h(1)=-k<0$，$h(k+1)=ke^{k+1}-k(k+1)^2=k[e^{k+1}-(k+1)^2]$，

令 $t=k+1>2$，$m(t)=e^t-t^2$，则 $m'(t)=e^t-2t$，$m''(t)=e^t-2$， ……（9 分）

因为 $t>2$，则 $m''(t)>0$，

所以 $m'(t)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $m'(t)>m'(2)=e^2-4>0$，

所以 $m(t)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增，……（10 分）

所以 $m(t)>m(2)=e^2-4>0$，即 $h(k+1)>0$，

所以 $h(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上有且只有一个零点. ……（11 分）

综上，当 $k\in[0,+\infty)$ 时，$h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有且只有一个零点，

即方程 $f(x)=g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有且仅有 1 个实数根. ……（12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。