青海省大通县教学研究室2023届高三第二次模拟考试·数学(理科)

参考答案、提示及评分细则

1. B　$M=\{x|\log_2 x<3\}=\{x|0<x<8\}$,$N=\{x|x>-1\}$,则 $M\cap N=(0,8)$. 故选 B.

2. D　由题意得,$\bar{z}_2=1-\mathrm{i}$,所以 $z=z_1\cdot\bar{z}_2=(2+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=3-\mathrm{i}$,所以复数 z 在复平面内对应的点位于第四象限. 故选 D.

3. A　$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})^2=28=\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4+12-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$,从而 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,故而 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{5}{6}\pi$. 故选 A.

4. B　$\forall x\in(0,1]$,$a\leqslant b+x\Rightarrow a\leqslant b$,故 A 不符合题意;$\forall x\in(0,1]$,$a+x<b$,则 $a<b$,反之不一定成立,故 B 符合题意;由 $\exists x\in[0,1]$,$a<b+x$,无法得到 a,b 之间的大小关系,故 C 不符合题意;$\exists x\in[0,1]$,$a+x\leqslant b\Rightarrow a\leqslant b$,故 D 不符合题意. 故选 B.

5. D　由题图可知 $f(x)$ 图象的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$,$f(x)$ 的最小正周期 $T=4\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}\right)=2\pi$,$f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(k\pi+\dfrac{\pi}{6},0\right)$,$k\in\mathbf{Z}$,结合选项可知,当 $k=-2$ 时,$f(x)$ 图象的一个对称中心是 $\left(-\dfrac{11\pi}{6},0\right)$. 故选 D.

6. A　当 $1-a>0$,即 $a-1<0$ 时,$f(1-a)=4^{1-a}$,$f(a-1)=2^{a-(a-1)}=2$. 因为 $f(1-a)=f(a-1)$,所以 $4^{1-a}=2$,解得 $a=\dfrac{1}{2}$,满足题意. 当 $1-a<0$,即 $a-1>0$ 时,$f(1-a)=2^{a-(1-a)}=2^{2a-1}$,$f(a-1)=4^{a-1}$. 因为 $f(1-a)=f(a-1)$,所以 $2^{2a-1}=4^{a-1}$,方程无解. 故选 A.

7. B　按 A 工厂分类,第一类:A 工厂仅接收 1 人有 $C_2^1C_3^2A_2^2=12$ 种分配方法;第二类:A 工厂接收 2 人有 $C_2^2A_2^2=2$. 综上知不同的分配方法有 $12+2=14$ 种. 故选 B.

8. A　当 $x<0$ 时,$y=f(-|x|)=f(x)$,其图象在 y 轴左侧的部分与题图 1 相同;当 $x>0$ 时,$y=f(-|x|)=f(-x)$,其图象在 y 轴右侧的部分与题图 1 y 轴左侧的图象关于 y 轴对称. 故选 A.

9. D　因为 $A_1\in(0,\pi)$,所以 $\cos A=\sin A_1>0$,又 $A\in(0,\pi)$,所以 $A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,同理可知 $B,C\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,故 $\triangle ABC$ 是锐角三角形;因为 $\sin A_1=\cos A=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)$,$A_1\in(0,\pi)$,$A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,所以 $A_1=\dfrac{\pi}{2}-A$,或 $A_1=\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)=\dfrac{\pi}{2}+A$;同理可得:$B_1=\dfrac{\pi}{2}-B$,或 $B_1=\dfrac{\pi}{2}+B$;$C_1=\dfrac{\pi}{2}-C$,或 $C_1=\dfrac{\pi}{2}+C$. 若 $A_1=\dfrac{\pi}{2}-A$,$B_1=\dfrac{\pi}{2}-B$,$C_1=\dfrac{\pi}{2}-C$ 三式同时成立,三式两边分别相加,得 $A_1+B_1+C_2=\dfrac{3\pi}{2}-(A+B+C)$,由内角和定理得 $\pi=\dfrac{3\pi}{2}-\pi$,显然不成立,所以三式中仅有两式成立,故 $\triangle A_1B_1C_1$ 为钝角三角形. 故选 D.

10. B　对于 A,因为 $f'(x)=3x^2-a$,当 $a<0$ 时,$f'(x)=3x^2-a>0$ 恒成立,所以此时不存在极值点,故 A 正确;对于 B,因为 $f'(x)=3x^2-1$,令 $f'(x)>0$ 得 $x>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,令 $f'(x)<0$ 得 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递减,在 $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$,$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 上单调递增,所以 $f(x)_{极大值}=f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=2$

$+\frac{2\sqrt{3}}{9}>0$，$f(x)_{极小值}=f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=2-\frac{2\sqrt{3}}{9}>0$，所以函数 $f(x)$ 有且只有一个零点，故 B 错误；对于 C，令 $h(x)=x^3-ax$，该函数的定义域为 $\mathbf{R}$，$h(-x)=(-x)^3-a(-x)=-x^3+ax=-h(x)$，则 $h(x)$ 是奇函数，$(0,0)$ 是 $h(x)$ 的对称中心，将 $h(x)$ 的图象向上移动 2 个单位得到 $f(x)$ 的图象，所以点 $(0,2)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心，故 C 正确；对于 D，设切点为 $(x_0,x_0^3-ax_0+2)$，$f'(x_0)=3x_0^2-a$，故切线方程为 $y-(x_0^3-ax_0+2)=(3x_0^2-a)(x-x_0)$，将 $(0,0)$ 代入得 $x_0=1$，所以 $3-a=2$，解得 $a=1$，故 D 正确. 故选 B.

11. A　由题可知矩形 $ABCD$ 所在截面圆的半径即为矩形 $ABCD$ 的对角线长度的一半，因为 $AB=3$，$BC=\sqrt{3}$，所以矩形 $ABCD$ 所在截面圆的半径 $r=\frac{\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}}{2}=\sqrt{3}$，由矩形 $ABCD$ 的面积 $S=AB\cdot BC=3\sqrt{3}$，设 O 到平面 $ABCD$ 的距离为 h，所以 $V_{O\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}h=\frac{1}{3}\times3\sqrt{3}h=4\sqrt{3}$，解得 $h=4$，所以球 O 的半径 $R=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{19}$，所以球 O 的表面积 $S=4\pi R^2=76\pi$. 故选 A.

12. C　点 $F_2(c,0)$ 到渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 的距离 $|PF_2|=\frac{\left|\frac{bc}{a}-0\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}=b$，则 $|PF_1|=\sqrt{6}|PF_2|=\sqrt{6}b$，由余弦定理，得 $\cos\angle PF_2F_1=\frac{PF_2^2+F_1F_2^2-PF_1^2}{2PF_2\cdot F_1F_2}=\frac{b^2+4c^2-6b^2}{2b\cdot2c}=\frac{b}{c}$，可得 $4c^2=9b^2=9(c^2-a^2)$，即 $e=\frac{c}{a}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$. 故选 C.

13. -1　因为函数图象过定点 $A(1,2)$，将它代入抛物线方程得 $p=2$，所以其准线方程为 $x=-1$.

14. $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$　因为 α 为锐角，且 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$.

15. ①④　对于①，易得四边形 BCD_1A_1 为平行四边形，则 $\angle B_1CD_1$ 就是 A_1B 与 B_1C 所成的角，连接 B_1D_1，可以得到 $\triangle B_1CD_1$ 为等边三角形，所以 A_1B 与 B_1C 所成的角为 60°，故①正确；对于②，因为 $A_1D_1\perp$ 平面 CC_1D_1D，则 $A_1D_1\perp C_1D$，而 $C_1D\perp D_1C$，所以 $C_1D\perp$ 平面 A_1CD_1，所以直线 CA_1 与 C_1D 所成的角为 90°，故②错误；对于③，连接 A_1C_1，设 $A_1C_1\cap B_1D_1=O$，连接 BO，因为 $BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，$C_1O\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，则 $C_1O\perp B_1B$，因为 $C_1O\perp B_1D_1$，$B_1D_1\cap B_1B=B_1$，所以 $C_1O\perp$ 平面 BB_1D_1D，所以 $\angle C_1BO$ 为直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角，设正方体棱长为 1，则 $C_1O=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$BC_1=\sqrt{2}$，$\sin\angle C_1BO=\frac{C_1O}{BC_1}=\frac{1}{2}$，所以直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 30°，故③错误；对于④，因为 $C_1C\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\angle C_1BC$ 为直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角，易得 $\angle C_1BC=45^\circ$，故④正确. 故选①④.

16. $\frac{6+\sqrt{2}}{11}$　ξ 的可能取值为 $0,1,\sqrt{2}$. 若两条棱相交，则交点必在正方体的顶点处，过任意一个顶点的棱有 3 条，所以 $P(\xi=0)=\frac{8C_3^2}{C_{12}^2}=\frac{4}{11}$；若两条棱平行，则它们的距离为 1 或 $\sqrt{2}$，而距离为 $\sqrt{2}$ 的共有 6 对，则 $P(\xi=\sqrt{2})=\frac{6}{C_{12}^2}=\frac{1}{11}$；当两条棱异面时，两条棱上各取一点，其两点间距离的最小值为 1，则 $P(\xi=1)=1-P(\xi=0)-P(\xi=\sqrt{2})=1-\frac{4}{11}-\frac{1}{11}=\frac{6}{11}$，所以随机变量 ξ 的分布列为

ξ	0	1	$\sqrt{2}$
P	$\frac{4}{11}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{1}{11}$

所以 $E\xi=0\times\frac{4}{11}+1\times\frac{6}{11}+\sqrt{2}\times\frac{1}{11}=\frac{6+\sqrt{2}}{11}$.

17. 解:(1)由题意,$\overline{x}=\frac{20+15+13+3+2+(-5)+(-10)+(-18)}{8}=\frac{5}{2}$, …………………………………… 2 分

$\overline{y}=\frac{6.5+3.5+3.5+1.5+0.5+(-0.5)+(-2.5)+(-3.5)}{8}=\frac{9}{8}$, …………………………………… 4 分

$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{8}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{8}x_i^2-n\overline{x}^2}=\frac{324-8\times\frac{5}{2}\times\frac{9}{8}}{1\ 256-8\times\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}$, …………………………………… 6 分

所以 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}=\frac{9}{8}-\frac{1}{4}\times\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$,故线性回归方程为 $\hat{y}=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$. …………………………………… 8 分

(2)由题意,设高度为 128 cm 的这种树苗的树干最大直径为 ω,

则直径偏差为 $\omega-31.5$,而高度偏差为 $128-120=8$, …………………………………… 10 分

所以 $\omega-31.5=\frac{1}{4}\times8+\frac{1}{2}$,解得 $\omega=34$,

所以可以预测这株树苗的树干最大直径为 34 mm. …………………………………… 12 分

18. 解:(1)由 $a_n+S_n=1$,得 $a_{n+1}+S_{n+1}=1$,

两式相减,得 $a_{n+1}-a_n+S_{n+1}-S_n=0$,

所以 $2a_{n+1}=a_n$,即 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$. …………………………………… 2 分

又因为 $n=1$ 时,$a_1+S_1=1$,所以 $a_1=\frac{1}{2}$, …………………………………… 3 分

因为$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$,

所以数列$\{a_n\}$是首项为$\frac{1}{2}$,公比为$\frac{1}{2}$的等比数列.

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$. …………………………………… 5 分

(2)由(1)得 $b_n=12+\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^n=12-n$, …………………………………… 7 分

当 $n\leqslant12$ 时,$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{n(b_1+b_n)}{2}=\frac{-n^2+23n}{2}$, …………………………………… 9 分

当 $n\geqslant13$ 时,$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_{12}-(b_{13}+b_{14}+\cdots+b_n)=2(b_1+b_2+\cdots+b_{12})-(b_1+b_2+\cdots+b_n)=2\times\frac{12(b_1+b_{12})}{2}-\frac{n(b_1+b_n)}{2}=\frac{n^2-23n+264}{2}$. …………………………………… 11 分

综上,$T_n=\begin{cases}\frac{-n^2+23n}{2},n\leqslant12,\\ \frac{n^2-23n+264}{2},n\geqslant13.\end{cases}$ …………………………………… 12 分

19.(1)证明:取 BC 的中点 G,连接 AG,DG,FG,

因为 $AD/\!/BC,BC=2AD$,所以 $AD/\!/CG,AD=CG$,

所以四边形 $AGCD$ 为平行四边形,所以 $AG/\!/CD,AG=CD$,

同理 $DG/\!/AB$. ………………………………………………………………………… 2 分

因为 $AB\subset$平面 ABE,$DG\not\subset$平面 ABE,所以 $DG/\!/$平面 ABE,

又 $EF/\!/CD,EF=CD$,所以 $AG/\!/EF,AG=EF$,

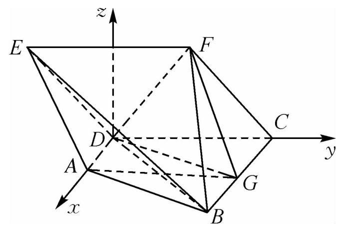
所以四边形 $AGFE$ 为平行四边形,所以 $AE/\!/FG$,

因为 $AE\subset$平面 ABE,$FG\not\subset$平面 ABE,所以 $FG/\!/$平面 ABE, ………………………… 4 分

又 $DG,FG\subset$平面 DFG,且 $DG\cap FG=G$,所以平面 $DFG/\!/$平面 ABE,

因为 $DF\subset$平面 DFG,故 DF 与平面 ABE 无公共点,所以 $DF/\!/$平面 ABE. ………… 6 分

(2)解:过 D 在平面 $CDEF$ 内作直线 $l\perp CD$,由题意得,$l\perp$ 平面 $ABCD$,因为 $AD\subset$平面 $ABCD$,所以 $l\perp AD$. ………………………………… 7 分



以 D 为原点,直线 DA,DC,l 分别为 x 轴,y 轴,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,则 $D(0,0,0)$,$A(1,0,0)$,$B(2,2,0)$,$E(0,-1,\sqrt{3})$,$F(0,1,\sqrt{3})$,

所以$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{DE}=(0,-1,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{DF}=(0,1,\sqrt{3})$. ……………………………………… 8 分

设平面 DBE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2x+2y=0,\\ -y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

令 $y=\sqrt{3}$,解得 $x=-\sqrt{3},z=1$,故 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},\sqrt{3},1)$; ……………………………………… 9 分

设平面 DBF 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DF}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2a+2b=0,\\ b+\sqrt{3}c=0,\end{cases}$

令 $b=\sqrt{3}$,解得 $a=-\sqrt{3},c=-1$,故 $\boldsymbol{m}=(-\sqrt{3},\sqrt{3},-1)$, ……………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{5}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\dfrac{5}{7}$, ……………………………………… 11 分

设二面角 $E-BD-F$ 的大小为 θ,所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle}=\sqrt{1-\dfrac{25}{49}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$. …………………… 12 分

20.解:设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $H\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$,直线 OH 的斜率 $k_{OH}=\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\dfrac{1}{2}$. ……… 1 分

因为 M,N 在椭圆 C 上,所以$\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1,\dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1$,

两式相减得$\dfrac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}+\dfrac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$,即$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2(x_1+x_2)(x_1-x_2)}=0$,……… 3 分

又 $k_{MN}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=1$,所以$\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{2b^2}=0$,即 $a^2=2b^2$. ………………………………………… 4 分

又因为椭圆 C 过点$\left(1,\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$,所以$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{2b^2}=1$,解得 $a^2=4,b^2=2$,

所以椭圆 C 的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$. ……………………………………………………………… 5 分

(2)联立$\begin{cases} y=kx+2, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$消 y 整理得$(2k^2+1)x^2+8kx+4=0$.

因为直线与椭圆交于 A,B 两点,故 $\Delta>0$,解得 $k^2>\dfrac{1}{2}$. …………………………………… 6 分

设 $A(x_3,y_3)$,$B(x_4,y_4)$,则 $x_3+x_4=\dfrac{-8k}{2k^2+1}$,$x_3x_4=\dfrac{4}{2k^2+1}$.

设 AB 中点 $G(x_0,y_0)$,则 $x_0=\dfrac{x_3+x_4}{2}=\dfrac{-4k}{2k^2+1}$,$y_0=kx_0+2=\dfrac{2}{2k^2+1}$,故 $G\left(\dfrac{-4k}{2k^2+1},\dfrac{2}{2k^2+1}\right)$. ……… 7 分

假设存在 k 和点 $P(m,0)$,使得$\triangle PAB$ 是以 P 为直角顶点的等腰直角三角形,

则 $PG\perp AB$,故 $k_{PG}\cdot k_{AB}=-1$,所以$\dfrac{\frac{2}{2k^2+1}}{\frac{-4k}{2k^2+1}-m}\times k=-1$,解得 $m=\dfrac{-2k}{2k^2+1}$,故 $P(\dfrac{-2k}{2k^2+1},0)$. ……… 8 分

又因为$\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$,所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$,

所以$(x_3-m,y_3)\cdot(x_4-m,y_4)=0$,即$(x_3-m)(x_4-m)+y_3y_4=0$,

整理得$(k^2+1)x_3x_4+(2k-m)(x_3+x_4)+m^2+4=0$.

所以$(k^2+1)\cdot\dfrac{4}{2k^2+1}-(2k-m)\cdot\dfrac{8k}{2k^2+1}+m^2+4=0$, ………………………………… 10 分

代入 $m=\dfrac{-2k}{2k^2+1}$,整理得 $k^4=1$,即 $k^2=1$,所以 $k=1$ 或 $k=-1$.

即存在 k 使得$\triangle PAB$ 是以 P 为顶点的等腰直角三角形. ………………………………………… 11 分

当 $k=-1$ 时,P 点坐标为$\left(\dfrac{2}{3},0\right)$;当 $k=1$ 时,P 点坐标为$\left(-\dfrac{2}{3},0\right)$.

此时,$\triangle PAB$ 是以 P 为直角顶点的等腰直角三角形. …………………………………………… 12 分

21.(1)解:$f'(x)=a+\dfrac{b}{x^2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{ax^2-2x+a}{x^2}$,

当 $\Delta=4-4a^2\leqslant0$,即 $a\geqslant1$ 时,$f'(x)\geqslant0$ 恒成立,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. …………………………… 2 分

当 $\Delta>0$,即 $0<a<1$ 时,由 $f'(x)>0$ 得 $0<x<\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}$或 $x>\dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}$.

由 $f'(x)<0$ 得$\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}<x<\dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}$,

所以 $f(x)$在$\left(0,\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)$和$\left(\dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{a},+\infty\right)$上单调递增,在$\left(\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a},\dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right)$上单调递减. ……………………………………………………………………………… 4 分

(2)证明:$\dfrac{b}{x^2}-\dfrac{2}{x}+1=m$ 有两个不同的根 x_1,x_2,则$\dfrac{1}{x_1}$,$\dfrac{1}{x_2}$是方程 $bx^2-2x+1-m=0$ 的两个根,

所以$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{2}{b}$,$x_1+x_2=\dfrac{2}{b}x_1x_2>2\sqrt{x_1x_2}$, …………………………………… 6 分

所以 $x_1x_2>b^2$,$\dfrac{1}{x_1x_2}=\dfrac{1-m}{b}$,$m=1-\dfrac{b}{x_1x_2}>1-\dfrac{b}{b^2}=1-\dfrac{1}{b}>0$. …………………………… 7 分

$f(x_1)+f(x_2)=x_1+x_2-b\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)-2\ln x_1x_2=\frac{2}{b}x_1x_2-2-2\ln x_1x_2$，

令 $t=x_1x_2>b^2$，

所以 $g(t)=f(x_1)+f(x_2)+2m=\frac{2}{b}t-2\ln t-2+2\left(1-\frac{b}{t}\right)=\frac{2}{b}t-2\ln t-\frac{2b}{t}$，…………………… 8 分

所以 $g'(t)=\frac{2}{b}-\frac{2}{t}+\frac{2b}{t^2}=\frac{2(t^2-bt+b^2)}{bt^2}=\frac{2\left[\left(t-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\right]}{bt^2}>0$，

所以 $g(t)$在$(0,+\infty)$单调递增，

所以 $g(t)>g(b^2)=2\left(b-\frac{1}{b}-2\ln b\right)$. ……………………………………………………… 10 分

令 $h(b)=b-\frac{1}{b}-2\ln b$，

则 $h'(b)=1+\frac{1}{b^2}-\frac{2}{b}=\frac{b^2-2b+1}{b^2}=\frac{(b-1)^2}{b^2}>0$，

所以 $h(b)$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以 $h(b)>h(1)=0$，

所以 $g(t)>g(b^2)=2h(b)>0$，即 $f(x_1)+f(x_2)+2m>0$. …………………………………… 12 分

22. 解：(1)由 $\rho=2\cos\theta$，得 $\rho^2=2\rho\cos\theta$，将$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$代入得，$x^2+y^2=2x$，

所以 C 的直角坐标方程为$(x-1)^2+y^2=1$. …………………………………………… 4 分

(2)因为直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=5+\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\sqrt{3}+\frac{1}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），

所以 $M(5,\sqrt{3})$在 l 上，把 l 的参数方程代入$(x-1)^2+y^2=1$，得 $t^2+5\sqrt{3}t+18=0$，

设 A,B 所对应的参数分别为 t_1,t_2，所以 $\Delta=(5\sqrt{3})^2-4\times18=3>0$，

所以 $t_1+t_2=-5\sqrt{3}$，$t_1t_2=18>0$，所以 $t_1<0,t_2<0$，……………………………………… 6 分

故$\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}=\frac{|MA|+|MB|}{|MA|\cdot|MB|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1||t_2|}=\frac{|t_1+t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{5\sqrt{3}}{18}$. ……………………………… 10 分

23. 解：(1)当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)=3x+1$，由 $f(x)=3x+1\geqslant7\Rightarrow x\geqslant2$，所以 $x\geqslant2$；

当$-1<x<1$ 时，$f(x)=3+x$，由 $f(x)=3+x\geqslant7\Rightarrow x\geqslant4$，$x\in\varnothing$；

当 $x\leqslant-1$ 时，$f(x)=-3x-1$，由 $f(x)=-3x-1\geqslant7\Rightarrow x\leqslant-\frac{8}{3}$，所以 $x\leqslant-\frac{8}{3}$.

综上，$f(x)\geqslant7$ 的解集为$\left(-\infty,-\frac{8}{3}\right]\cup[2,+\infty)$. ……………………………………… 5 分

(2) $f(x)+|x-1|=|2x+2|+2|x-1|=2(|x+1|+|x-1|)\geqslant2|1-(-1)|=4$. ………………… 7 分

故 $a^2+b^2\leqslant4$ 恒成立，

又$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\leqslant2(a^2+b^2)\leqslant8$，当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$时，取等号，故 $a+b$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$.

……………………………………………………………………………………………… 10 分