# 台州市 2022学年第二学期 高二年级期末质量评估试题

# 数学答案

2023．07

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1~8 ADBC　BDBC

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多个选项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. BC　10. BCD　11. ACD　12. ACD

三、填空题：本大题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分。

13. $\frac{3}{4}$　14. 7（答案不唯一，只需填区间[5,8]内的任意一个值均给分）

15. $\frac{1}{3}$　16. 4

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （本小题满分为 10 分）

解：(I) 解法 1：男生甲入选，女生乙不入选有 $C_5^2=10$ 种，

男生甲未入选，女生乙入选有 $C_5^2=10$ 种，　……………………3 分

男生甲入选，女生乙入选有 $C_5^1=5$ 种，

共有 25 种选法.　……………………5 分

解法 2：7 人中选 3 人共有 $C_7^3=35$ 种，

甲乙两人均未入选有 $C_5^3=10$ 种，

如果男生中的甲和女生中的乙至少要有一人在内共有 $35-10=25$ 种.　……………………5 分

(II) 男生 1 人入选，女生 2 人入选有 $C_4^1C_3^2=12$ 种，

男生 2 人入选，女生 1 人入选有 $C_4^2C_3^1=18$ 种，

因此 3 人中既有男生又有女生，共有 30 选法.　……………………10 分

方法2：$C_7^3-C_4^3-C_3^3=30$.

18.（本小题满分为12分）

解：（I）令 $x=1$ 可得，展开式中各项系数之和为 $(-1)^n$， ……………………2分

而展开式中的二项式系数之和为 $2^n$， ……………………4分

$\therefore 2^n\times(-1)^n=256$，$\therefore n=8$. ……………………6分

（II）$\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{2}{x}\right)^n$ 的展开式的通项为：

$C_8^r(\sqrt[3]{x})^{8-r}(-\dfrac{2}{x})^r=(-2)^rC_8^rx^{\frac{8-4r}{3}}\quad(0\le r\le 8)$， ……………………8分

由题意，$\dfrac{8-4r}{3}=-4$，$r=5$， ……………………10分

所以展开式中含 $x^{-4}$ 项的系数为 $(-2)^5C_8^5=-1792$. ……………………12分

19.（本小题满分为12分）

解：（I）在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

$|\overline{AC}|=\sqrt{2}$，$|\overline{AC_1}|=\sqrt{3}$，$\cos<\overline{AC},\overline{AC_1}>=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$， …………………… 3分

所以 $\vec{a}\cdot\overline{AC}=\overline{AC_1}\cdot\overline{AC}=\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=2$. …………………… 5分

（II）由 $\vec{a}\cdot\overline{AC}=0$，得 $\vec{a}\perp\overline{AC}$

在正方体8个顶点中的任意两个顶点的连线中与 $AC$ 垂直的有

$AA_1,BB_1,CC_1,DD_1,BD,B_1D_1,B_1D,BD_1$ ……………………10分

所以 $P(A)=\dfrac{8\times2}{A_8^2}=\dfrac{2}{7}$ ……………………12分

20（本小题满分为12分）

解：（I）在 $\triangle DAB$ 中，$BD=\sqrt{1+1-2\times1\times1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$， ………………5分

（Ⅱ）$f(\theta)=\sqrt{3}(\frac{\pi}{2}-\theta)+2+2\sqrt{2-2\cos\theta}=\sqrt{3}(\frac{\pi}{2}-\theta)+4\sin\frac{\theta}{2}+2$， ……………………8 分

$f'(\theta)=-\sqrt{3}+2\cos\frac{\theta}{2}$，

所以$f(\theta)$在$(0,\frac{\pi}{3})$上递增，在$(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$上递减， ……………………10 分

即$f(\theta)_{\max}=f(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}+4<5$，

所以，旅游公司的预算足够. ……………………12 分

21.（本小题满分为 12 分）

解：（Ⅰ）第一次从袋子中摸出的是白球，把函数$f(x)=\lg x$变换为$f_1(x)=\lg(10x)=\lg x+1$；

第二次从袋子中摸出的是红球，把函数$f_1(x)=\lg x+1$变换为$f_2(x)=\lg x$；

所以$f_2(x)=\lg x$ . ……………………4 分

（Ⅱ）经过 3 次$T$变换后后$f_3(x)$有 3 种情况

若摸出的 3 个球都是白球，则$f_3(x)=\lg x+3$，$f_3(1)=3$；

若摸出的 3 个球为 2 个白球 1 个红球，则$f_3(x)=\lg x+1$，$f_3(1)=1$；

若摸出的 3 个球为 1 个白球 2 个红球，则$f_3(x)=\lg x-1$，$f_3(1)=-1$；

若摸出的 3 个球都是红球，则$f_3(x)=\lg x-3$，$f_3(1)=-3$.

所以随机变量$X$的取值为$-3,-1,1,3$. ……………………6 分

$P(X=-3)=C_3^3(\frac{2}{3})^0(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{27}$

$P(X=-1)=C_3^2(\frac{2}{3})^1(\frac{1}{3})^2=\frac{6}{27}$

$P(X=1)=C_3^1(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})^1=\frac{12}{27}$，

$P(X=3)=C_3^0(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{3})^0=\frac{8}{27}$. ……………………8 分

所以求随机变量 $X$ 的分布列为

| $X$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{6}{27}$ | $\frac{12}{27}$ | $\frac{8}{27}$ |

所以 $E(X)=(-3)\times\frac{1}{27}+(-1)\times\frac{6}{27}+1\times\frac{12}{27}+3\times\frac{8}{27}=1$. ........................12 分

22.（本小题满分为 12 分）

解：(I) 当 $a=3$，$f'(x)=xe^x-3$， ........................2 分

$k=f'(0)=-3$，$f(0)=-1$，

所以切线方程为：$3x+y+1=0$. ........................4 分

(II) $f'(x)=xe^x-a$，

若 $a>e$，因为 $f'(x)=xe^x-a$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，

且 $f'(1)=e-a<0$，$f'(\sqrt{\frac{a}{e}})=\sqrt{\frac{a}{e}}e^{\sqrt{\frac{a}{e}}}-a>\sqrt{\frac{a}{e}}\times e\sqrt{\frac{a}{e}}-a=0$（利用 $e^x\geq ex$），

所以存在唯一的实数 $x_0\in(1,\sqrt{\frac{a}{e}})$，使得 $f'(x_0)=0$，即 $x_0e^{x_0}=a$， ........................6 分

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上递增.

$f(x)_{\min}=f(x_0)=(x_0-1)e^{x_0}-ax_0=a-\frac{a}{x_0}-ax_0=a-a(\frac{1}{x_0}+x_0)<0$， ........................8 分

又因为当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，

所以存在 $m=a(\frac{1}{x_0}+x_0)-a$，使得方程 $|f(x)|=m$ 恰有三个不同的根. ...............10 分

另一方面由 $x_0\in(1,\sqrt{\frac{a}{e}})$，得 $2<\frac{1}{x_0}+x_0<\frac{a+e}{\sqrt{ae}}$，

所以 $a<m<a(\frac{a+e}{\sqrt{ae}}-1)$. ........................12 分