

本试卷共 4 页，共两大部分，19 道小题，满分 100 分。考试时长 90 分钟。试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，请将答题卡交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{x | -3 < x < 3\}$, $B = \{-3, 0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$

- (A) $\{0, 1\}$ (B) $\{0, 1, 2\}$ (C) $\{-3, 0, 1, 2\}$ (D) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

(2) 已知命题 $p: \exists x \leq 3, |x-2| \leq 1$, 则 $\neg p$ 为

- (A) $\exists x \leq 3, |x-2| > 1$ (B) $\exists x > 3, |x-2| \leq 1$
(C) $\forall x \leq 3, |x-2| > 1$ (D) $\forall x > 3, |x-2| > 1$

(3) 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，公比 $q > 0$, $a_2 + a_3 = 12$, $a_1 \cdot a_5 = 81$, 则 $a_5 =$

- (A) 81 (B) 27 (C) 32 (D) 16

(4) 下列四个函数中，在区间 $[0, 1]$ 上的平均变化率最大的为

- (A) $y = x$ (B) $y = e^x$ (C) $y = \sin x$ (D) $y = \frac{1}{x+1}$

(5) 已知 $a < b$, 则

- (A) $a^2 < b^2$ (B) $e^{-a} < e^{-b}$
(C) $\ln(|a| + 1) < \ln(|b| + 1)$ (D) $a|a| < b|b|$

(6) 已知函数 $f(x) = x^2 \cdot \sin x$, 则 $f'(\frac{\pi}{2})$ 的值为

- (A) 0 (B) π (C) $\frac{\pi^2}{4}$ (D) $-\frac{\pi^2}{4}$

(7) 从 A, B, C, D 4 本不同的文学读物中选出 3 本分给甲、乙、丙 3 名学生（每人一本），如果甲不得 A 读物，则不同的分法种数为

- (A) 24 (B) 18 (C) 6 (D) 4

(8) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 公差为 d , 则“ S_n 有最大值”是“ $d < 0$ ”的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(9) 学校要从 8 名候选人中选 4 名同学组成学生会. 已知恰有 3 名候选人来自甲班, 假设每名候选人都有相同的会被选中, 则甲班恰有 2 名同学被选中的概率为

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{4}{15}$

(10) 已知函数 $f(x) = x^3 + 3x^2 + bx + c$. 若函数 $g(x) = e^{-x}f(x)$ 有三个极值点 $m, 1, n$, 且 $m < 1 < n$, 则 mn 的取值范围是

- (A) $(-\infty, 1)$ (B) $(-\infty, \frac{1}{4})$ (C) $(-\infty, -1)$ (D) $(-\infty, -2)$

第二部分 (非选择题 共60分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分。

(11) 在 $(1+3x)^4$ 的展开式中, x^2 的系数为_____。(用数字作答)

(12) 不等式 $\frac{1-x}{1+x} < 1$ 的解集是_____.

(13) 已知函数 $f(x) = e^x + ax^2 - 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 则 a 的取值范围是_____.

(14) 随着大数据时代的到来, 越来越多的网络平台开始使用推荐系统来给用户提供更加个性化的服务. 某公司在研发平台软件的推荐系统时发现, 当收集的数据量为 $x(x \geq 2)$ 万条时, 推荐系统的准确率约为 $p = \frac{x}{x+1}$, 平台软件收入为 40000 p 元. 已知每收集 1 万条数据, 公司需花费成本 100 元, 当收集的数据量为_____万条时, 该软件能获得最高收益.

(15) 已知各项均不为零的数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和是 S_n , $a_1 = a$, 且 $S_n = a_n a_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$).

出下列四个结论:

- ① $a_2 = 1$;
 ② $\{a_n\}$ 为递增数列;
 ③ 若 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} > a_n$, 则 a 的取值范围是 $(0, 1)$;
 ④ $\exists m \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $k > m$ 时, 总有 $\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} < 1 + e^{-10}$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 4 小题，共 40 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 9 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n ，满足 $a_4=8$ ， $S_3=12$ 。

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 若等比数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和为 T_n ，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，设 $c_n=a_n+b_n$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 M_n 。

条件①: $b_1b_2b_3=8$;

条件②: $T_2=S_2$;

条件③: $T_6=9T_3$ 。

(17) (本小题 10 分)

某企业产品利润依据产品等级来确定：其中一等品、二等品、三等品的每一件产品的利润分别为 100 元、50 元、50 元。为了解产品各等级的比例，检测员从流水线上随机抽取了 100 件产品进行等级检测，检测结果如下表：

| 产品等级 | 一等品 | 二等品 | 三等品 |
|----------|-----|-----|-----|
| 样本数量 (件) | 50 | 30 | 20 |

) 若从流水线上随机抽取 2 件产品，估计 2 件产品中恰有 1 件一等品、1 件二等品的概率；

) 若从流水线上随机抽取 3 件产品，记 X 为这 3 件产品中一等品的件数， Y 为这 3 件产品的利润总额。

①求 X 的分布列；

②直接写出 Y 的数学期望 EY 。

(18) (本小题 11 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} + a \ln x$.

(I) 当 $a=2$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 当 $a=2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的零点个数;

(III) 若对任意的 $x \in [1, +\infty)$, 都有 $f(x) \leq x$, 求实数 a 的最大值.

(19) (本小题 10 分)

给定整数 $n \geq 2$, 对于数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$ 定义数列 B 如下: $b_1 = \min \{a_1, a_2\}$, $b_2 = \min \{a_2, a_3\}, \dots, b_{n-1} = \min \{a_{n-1}, a_n\}$, $b_n = \min \{a_n, a_1\}$, 其中 $\min \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ 表示 x_1, x_2, \dots, x_k 这 k 个数中最小的数. 记 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$.

(I) 若数列 A 为① $1, 0, 0, 1$; ② $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, 分别写出相应的数列 B ;

(II) 求证: 若 $T_n = S_n$, 则有 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$;

(III) 若 $S_n = 0$, 常数 C_n 使得 $T_n \leq C_n \cdot \min \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 恒成立, 求 C_n 的最大值.