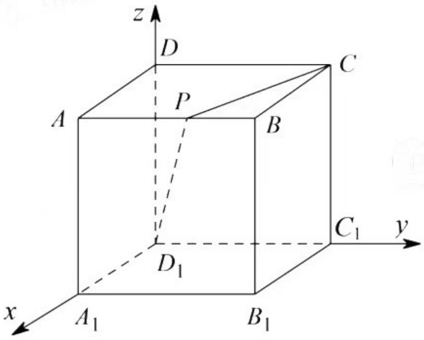
参考答案

1．C

建立空间直角坐标系，设 $AD=a$，求出 $\overline{D_1P}$、$\overline{CP}$，利用 $\overline{D_1P}\cdot\overline{CP}=0$，求出 a 的范围．

解：如图建立坐标系，



设 $AD=a(a>0)$，$AP=x(0<x<2)$，

则 $P(a,x,2)$，$C(0,2,2)$，$D_1(0,0,0)$，

$\therefore\ \overline{D_1P}=(a,x,2)$，$\overline{CP}=(a,x-2,0)$，

$\because D_1P\perp PC$，

$\therefore\ \overline{D_1P}\cdot\overline{CP}=0$，

即 $a^2+x(x-2)=0$，所以 $a=\sqrt{-x^2+2x}=\sqrt{-(x-1)^2+1}$，

当 $0<x<2$ 时，所以 $-(x-1)^2+1\in(0,1]$，所以 $a\in(0,1]$．

故选：C．

2．B

根据递推关系式构造等比数列 $\{a_n+3\}$，再根据等比数列通项公式得 a_n+3，即得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，最后根据分组求和法求结果并选择．

因为 $\dfrac{a_{n-1}-3}{a_n}=2$，所以 $a_{n-1}=2a_n+3$，即 $a_{n+1}+3=2(a_n+3)$，则数列 $\{a_n+3\}$ 是首项为 $a_1+3=5$，公比为 2 的等比数列，其通项公式为 $a_n+3=5\times2^{n-1}$，所以 $a_n=5\times2^{n-1}-3$，分组求和可得数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\ 5\times2^n-3n-5$．

故选 B．

$\therefore a^2=3b^2$，$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

故选：C.

本题考查双曲线的标准方程，以及双曲线的简单性质的应用，求得点A的坐标是解题的关键，属于中档题.

6．C

先求出 $bn=n$，$an=n^2$，从而得到 $c_n=\dfrac{1}{3n}-\dfrac{1}{n^2}$，判断出 $c_1<0$，$c_2<0$，$c_3=0$，当 $n\geq 4$ 时，$c_n>0$.

即可求出 Sn 的最小值.

记$\{bn\}$的前 n 项和为 $T_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}$，所以 $T_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}$，所以

$b_{n-1}=T_{n+1}-T_n=\dfrac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}-\dfrac{a_n+b_n}{2}$，所以 $b_{n+1}+b_n=a_{n+1}-a_n={b_{n+1}}^2-{b_n}^2$.

因为 $b_{n+1}+b_n\neq 0$，所以 $b_{n+1}-b_n=1$，

所以$\{bn\}$为 $b_1=1$，公差 $d=1$ 的等差数列，所以 $bn=n$. $an=b_n^2=n^2$.

所以 $c_n=\dfrac{1}{b_{3n}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{3n}-\dfrac{1}{n^2}$.

数列$\{cn\}$的前 n 项和为 Sn，要使 Sn 最小，只需把所有的负项都加完.

因为 $c_n=\dfrac{1}{3n}-\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{n-3}{3n^2}$，所以 $c_1=-\dfrac{2}{3}<0$，$c_2=-\dfrac{1}{12}<0$，$c_3=0$，当 $n\geq 4$ 时，$c_n>0$.

所以 Sn 的最小值为 $\left(-\dfrac{2}{3}\right)+\left(-\dfrac{1}{12}\right)=-\dfrac{3}{4}$.

故选：C

7．B

设抛物线 $x^2=4y$ 的准线方程为 $l:y=-1$，过 M 作 l 的垂线，垂足为 E，进而转化为求 $|ME|+|MC|$ 的最小值，在根据几何知识得当 C，M，E 在一条直线上时 $|ME|+|MC|$ 有最小值

解：设抛物线 $x^2=4y$ 的准线方程为 $l:y=-1$，C 为圆 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ 的圆心，

所以 C 的坐标为 $(-1,2)$，

过 M 作 l 的垂线，垂足为 E，根据抛物线的定义可知 $|MF|=|ME|$，

所以问题求 $|MF|+|MC|$ 的最小值，就转化为求 $|ME|+|MC|$ 的最小值，

由平面几何的知识可知，当 C，M，E 在一条直线上时，此时 $CE\perp l$，$|ME|+|MC|$

形如 $a_{n-1}=pa_n+q(p\ne 1,pq\ne 0)$ 的递推关系式，①利用待定系数法可化为 $a_{n+1}-\dfrac{q}{1-p}=p(a_n-\dfrac{q}{1-p})$，当 $a_1-\dfrac{q}{1-p}\ne 0$ 时，数列 $\{a_n-\dfrac{q}{1-p}\}$ 是等比数列；②由 $a_{n+1}=pa_n+q$，$a_n=pa_{n-1}+q(n\ge 2)$，两式相减，得 $a_{n+1}-a_n=p(a_n-a_{n-1})$，当 $a_2-a_1\ne 0$ 时，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是公比为 p 的等比数列.

3．D

先求导，求得 $f'(2)$ 得到 $f(x)$ 求解.

解：$f'(x)=\dfrac{2}{x}+2f'(2)x+2$，

则 $f'(2)=1+4f'(2)+2$，

解得 $f'(2)=-1$，

所以 $f(x)=2\ln x-x^2+2x+3$，

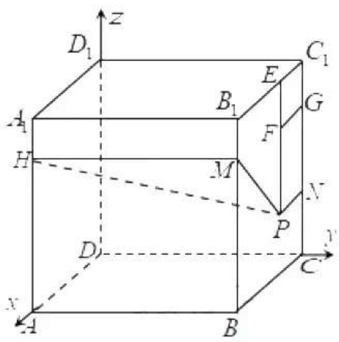
故 $f(1)=-1+2+3=4$.

故选：D

4．B

建立空间直角坐标系，根据 P 在 BCC_1B_1 内可设出 P 点坐标，作 $HM\perp BB_1$，连接 PM，可得 $HP^2=HM^2+MP^2$，作 $PN\perp CC_1$，根据空间中两点间距离公式，再根据二次函数的性质，即可求得 $|HP|^2$ 的范围，即得最小值.

根据题意，以 D 为原点建立空间直角坐标系，如图所示，



作 $HM\perp BB_1$，交 BB_1 于 M，连接 PM，则 $HM\perp PM$，

作 $PN \perp CC_1$，交 CC_1 于 N，则 PN 即为点 P 到平面 CDD_1C_1 距离.

设 $P(x,8,z)$,则 $F(2,8,6)$,$M(8,8,6)$,$N(0,8,z)$ $(0 \le x \le 8, 0 \le z \le 8)$，$PN = x$，

∵点 P 到平面 CDD_1C_1 距离等于线段 PF 的长，∴ $PN = PF$，

由两点间距离公式可得 $x=\sqrt{(x-2)^2+(z-6)^2}$，化简得 $4x-4=(z-6)^2$，则 $4x-4 \ge 0$，可得 $x \ge 1$，即 $1 \le x \le 8$.

在 $Rt\triangle HMP$ 中，

$|HP|^2=|HM|^2+|MP|^2=8^2+(x-8)^2+(z-6)^2=64+(x-8)^2+4x-4=(x-6)^2+88$ $(1 \le x \le 8)$，

所以 $|HP|^2 \ge 88$（当且仅当 $x=6$ 时取等号）.

故选: B.

关键点点睛：

本题的解题关键在于建立空间直角坐标系，利用坐标运算，将几何问题转化成代数问题，通过计算二次函数的最小值来突破难点.

5．C

设一渐近线 OA 的方程为 $y=\dfrac{b}{a}x$，设 $A(m,\dfrac{b}{a}m)$，$B(n,-\dfrac{bn}{a})$，由 $2\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FB}$，求得点 A 的坐标，再由 $FA \perp OA$，斜率之积等于 -1，求出 $a^2=3b^2$，代入 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ 进行运算.

解：由题意得右焦点 $F(c,0)$，设一渐近线 OA 的方程为 $y=\dfrac{b}{a}x$，

则另一渐近线 OB 的方程为 $y=-\dfrac{b}{a}x$，

设 $A(m,\dfrac{bm}{a})$，$B(n,-\dfrac{bn}{a})$，

$\because 2\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FB}$，

$\therefore 2(c-m，-\dfrac{bm}{a})=(n-c，-\dfrac{bn}{a})$，

$\therefore 2(c-m)=n-c$，$-\dfrac{2bm}{a}=-\dfrac{bn}{a}$，

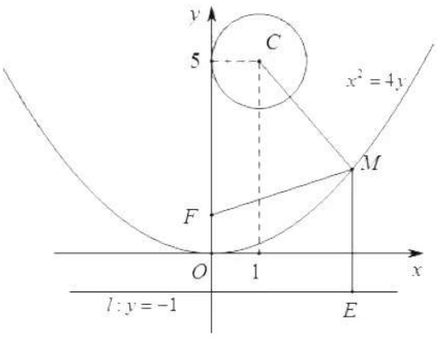
$\therefore m=\dfrac{3}{4}c$，$n=\dfrac{3c}{2}$，

$\therefore A\left(\dfrac{3c}{4},\dfrac{3bc}{4a}\right)$，

由 $FA \perp OA$ 可得，斜率之积等于 -1，即 $\dfrac{\frac{3bc}{4a}-0}{\frac{3c}{4}-c}\cdot\dfrac{b}{a}=-1$，

有最小值，最小值为$CE=5-(-1)=6$，

故选：B.



8．B

设$\overrightarrow{AB}=\vec{c},\overrightarrow{AC}=\vec{b}$.由题意$\left|\overrightarrow{AD}\right|=2,\angle BAC=60^\circ$.则$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{b}$，两端平方，根据数量积运算和基本不等式可得$|\vec{b}||\vec{c}|\le 6$，当且仅当$|\vec{c}|=2|\vec{b}|$时，等号成立.再由三角形面积公式可求 ABC面积的最大值

设$\overrightarrow{AB}=\vec{c},\overrightarrow{AC}=\vec{b}$.由题意$\left|\overrightarrow{AD}\right|=2,\angle BAC=60^\circ$，$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$.

则$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{b}$，

$\therefore \overrightarrow{AD}^2=\left(\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)^2=\frac{1}{9}|\vec{c}|^2+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2+\frac{4}{9}\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{9}|\vec{c}|^2+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2+\frac{4}{9}|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ$

$=\frac{1}{9}|\vec{c}|^2+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2+\frac{2}{9}|\vec{b}||\vec{c}|\ge 2\sqrt{\frac{1}{9}|\vec{c}|^2\times\frac{4}{9}|\vec{b}|^2}+\frac{2}{9}|\vec{b}||\vec{c}|=\frac{2}{3}|\vec{b}||\vec{c}|$，

即$4\ge\frac{2}{3}|\vec{b}||\vec{c}|$.$\therefore |\vec{b}||\vec{c}|\le 6$，当且仅当$\frac{1}{9}|\vec{c}|^2=\frac{4}{9}|\vec{b}|^2$，即$|\vec{c}|=2|\vec{b}|$时，等号成立.

$\therefore S_{ABC}=\frac{1}{2}|\vec{b}||\vec{c}|\sin\angle BAC\le\frac{1}{2}\times 6\times\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore$ ABC面积的最大值为$\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

故选：B.

本题考查利用向量求三角形的面积，考查基本不等式，属于中档题.

9．BCD

对A，根据斜率判断即可；

对B，根据直线垂直斜率之积为-1求解即可；

对C，根据点到线的距离公式求解即可；

对 D，先求得 $\sqrt{3}x-y+1=0$ 的斜率，再根据点斜式求解即可

对 A，直线 l：$\sqrt{3}x-y+1=0$，直线的斜率为：$\sqrt{3}$, 所以直线的倾斜角为：$\frac{\pi}{3}$, 所以 A 不正确；

对 B，直线 m：$x+\sqrt{3}y+1=0$ 的斜率为：$-\frac{\sqrt{3}}{3}$, 因为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}=-1$，故两条直线垂直，所以 B 正确；

对 C，点 $(\sqrt{3},0)$ 到直线 l 的距离是：$\frac{3+1}{\sqrt{3+1}}=2$，所以 C 正确；

对 D，$\sqrt{3}x-y+1=0$ 的斜率为 $\sqrt{3}$，故过 $(2\sqrt{3},2)$ 与直线 l 平行的直线方程是

$y-2=\sqrt{3}\left(x-2\sqrt{3}\right)$，化简得 $\sqrt{3}x-y-4=0$ 正确，所以 D 正确；

故选：BCD．

10．ABC

根据斐波那契数列的定义计算 a_7，判断 A，由递推公式判断 BCD．

由题意 $a_3=2.a_4=3.a_5=5.a_6=8.a_7=13$，A 正确；

$a_{2020}=a_{2019}+a_{2018}=a_{2019}+a_{2017}+a_{2016}=\cdots=a_{2019}+a_{2017}+\cdots+a_3+a_2=a_{2019}+a_{2017}+\cdots+a_3+a_1$，

B 正确；

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n=a_n+a_{n-1}+a_n=2a_n+a_{n-1}$，又 $a_{n-1}+a_{n-2}=a_n$，

所以 $a_{n+2}+a_{n-2}=2a_n+a_{n-1}+a_n-a_{n-1}=3a_n$，C 正确；

$a_{2021}=a_{2020}+a_{2019}=a_{2020}+a_{2018}+a_{2017}=\cdots=a_{2020}+a_{2018}+\cdots+a_4+a_3$

$=a_{2020}+a_{2018}+\cdots+a_4+a_2+a_1$，D 错．

故选：ABC．

关键点点睛：本题考查数列的递推公式，解题关键是利用递推公式求数列的项，对数列的项进行变形．如 BD 在变形以最后一项时要注意是哪一项．

11．AB

根据椭圆的定义结合已知条件求出 $|PF_2|$，再根据椭圆的几何性质 $|PF_2|\geq a-c$ 即可解出．

由椭圆定义，$|PF_1|+|PF_2|=2a.\because|PF_1|=2|PF_2|,\therefore3|PF_2|=2a\Rightarrow|PF_2|=\frac{2}{3}a$，

由椭圆的几何性质，$|PF_2|=\frac{2}{3}a\geq a-c\Rightarrow e=\frac{c}{a}\geq\frac{1}{3}$，又 $e<1$，$\therefore e\in[\frac{1}{3},1)$．

故选：AB.

12．ABD

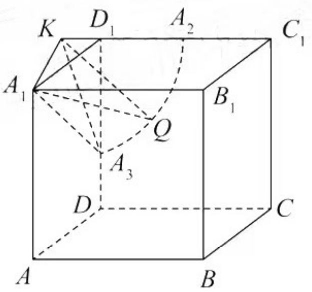
对于A，取DD_1,DC的中点分别为M,N，由条件确定Q的轨迹，结合锥体体积公式判断A，对于B，由条件确定Q的轨迹为MN，将原问题转化为平面上两点间的距离最小问题求解；对于C，由三角形外心的性质和向量数量积的性质可判断，对于D，由条件确定点Q的轨迹为圆弧A_2A_3，利用弧长公式求轨迹长度即可判断.

对于A，取DD_1,DC的中点分别为M,N，连接AM,AN,MN,DQ，则$\overrightarrow{DD_1}=2\overrightarrow{DM}$，$\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{DN}$，$MN//D_1C$，

因为$\overrightarrow{DQ}=\lambda\overrightarrow{DC}+\mu\overrightarrow{DD_1},(\lambda\in[0,1],\mu\in[0,1])$，$\lambda+\mu=\frac{1}{2}$，

所以$\overrightarrow{DQ}=2\lambda\overrightarrow{DN}+2\mu\overrightarrow{DM}$，$2\lambda+2\mu=1$，

所以Q,M,N三点共线，所以点Q在MN，因为$D_1C//A_1B$，$MN//D_1C$，所以$MN//A_1B$，$MN\not\subset$平面A_1BP，$A_1B\subset$平面A_1BP，所以MN // 平面A_1BP，所以点Q到平面A_1BP的距离为定值，因为A_1BP的面积为定值，所以四面体A_1BPQ的体积为定值，所以A正确，



对于B，因为$AM//BP$，因为$AM\not\subset$平面A_1BP，$BP\subset$平面A_1BP，所以AM // 平面A_1BP，

又AQ 平面A_1BP，$AQ\cap AM=M$，$AQ,AM\subset$平面AMQ，所以平面AMQ// 平面A_1BP，

取D_1C_1的中点E，连接PE，则$PE//D_1C$，$D_1C//A_1B$，所以$PE//A_1B$，所以A_1,B,P,E四点共面，所以平面AMQ// 平面A_1BPE，平面$A_1BPE\cap$平面$DCC_1D_1=PE$，平面$A_1MQ\cap$平面$DCC_1D_1=MQ$，所以$MQ//PE$，又$PE//D_1C$，所以$MQ//D_1C$，所以点Q的轨迹为线段MN，

翻折平面AMN，使其与五边形$MNCC_1D_1$

在同一平面，如图，则 $AQ+C_1Q\ge AC_1$，当且仅当 A,Q,C_1 三点共线时等号成立，所以 $AQ+C_1Q$ 的最小值为 AC_1，因为 $\angle BAD=60^\circ, AB=AD=AA_1=2$，所以 $AM=\sqrt{5}, MN=\sqrt{2}$，

$AN=\sqrt{AD^2+DN^2-2AD\cdot DN\cos120^\circ}=\sqrt{4+1-2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{7}$，所以

$AM^2+MN^2=AN^2$，在 C_1MN 中，$C_1M=C_1N=\sqrt{5}$，$MN=\sqrt{2}$，所以

$\cos\angle C_1MN=\dfrac{MC_1^2+MN^2-NC_1^2}{2MC_1\cdot MN}=\dfrac{5+2-5}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，所以

$\sin\angle C_1MN=\sqrt{1-\cos^2\angle C_1MN}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，所以

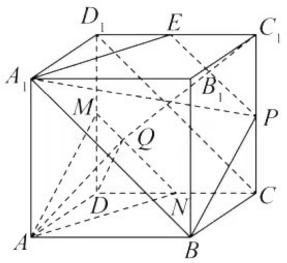
$\cos\angle AMC_1=\cos\left(\angle C_1MF+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\angle C_1MF=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，

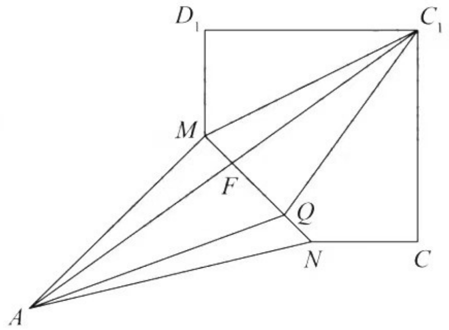
在 AMC_1 中，$AM=\sqrt{5}$，$MC_1=\sqrt{5}$，$\cos\angle AMC_1=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，

所以 $AC_1=\sqrt{MA^2+MC_1^2-2MA\cdot MC_1\cos\angle AMC_1}=\sqrt{5+5-2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\left(-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)}$，所以

$AC_1=\sqrt{10+3\sqrt{10}}$，即 $AQ+C_1Q$ 的最小值为 $\sqrt{10+3\sqrt{10}}$，

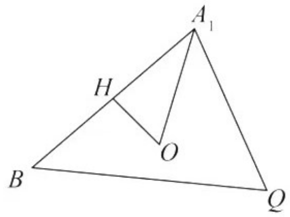
所以 B 正确，





对于 C，若$\triangle A_1BQ$的外心为O，过O作$OH\perp A_1B$于H，因为$\left|\overrightarrow{A_1B}\right|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，所以

$\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{A_1O}=\overrightarrow{A_1B}\cdot\left(\overrightarrow{A_1H}+\overrightarrow{HO}\right)=\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{A_1H}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1B}^2=4$，所以 C 错误，



对于 D，过A_1作$A_1K\perp C_1D_1$，垂足为K，因为$DD_1\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$，$A_1K\subset$平面$A_1B_1C_1D_1$，

所以$DD_1\perp A_1K$，因为$C_1D_1\cap DD_1=D_1$，$C_1D_1,DD_1\subset$平面DD_1C_1C，所以$A_1K\perp$平面DD_1C_1C，

因为$KQ\subset$平面DD_1C_1C，所以$A_1K\perp KQ$，

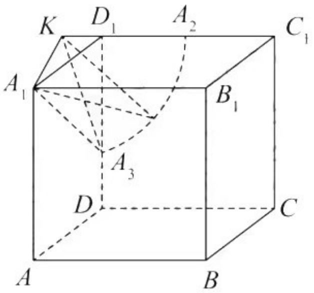
又在 A_1KD_1中，$A_1D_1=2,\angle A_1KD_1=\frac{\pi}{2},A_1D_1K=\frac{\pi}{3}$，

所以$KD_1=A_1D_1\cos\frac{\pi}{3}=1$，$A_1K=A_1D_1\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，

在 A_1KQ中，$A_1K=\sqrt{3}$，$A_1Q=\sqrt{7}$，$\angle A_1KQ=\frac{\pi}{2}$，所以$KQ=2$，则$Q$在以$K$为圆心，2 为半径的圆上运动，

在DD_1、D_1C_1上取点A_3、A_2，使得$D_1A_3=\sqrt{3},D_1A_2=1$，则$KA_3=KA_2=2$，所以点Q的轨迹为圆弧A_2A_3，因为$D_1K=1,D_1A_3=\sqrt{3}$，所以$\angle A_3KA_2=\frac{\pi}{3}$，则圆弧$A_2A_3$等于$\frac{2\pi}{3}$，所以 D 正确，

故选：ABD.



本题解决的关键在于根据所给条件结合线面位置关系确定点的轨迹，再结合锥体体积公式，空间图形与平面图形的转化解决问题.

13． -4

先计算$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$的坐标，利用空间向量共线定理即可求解.

因为$A(0,1,2)$，$B(1,3,5)$，$C(2,5,4-k)$，

所以$\overrightarrow{AB}=(1,2,3)$，$\overrightarrow{AC}=(2,4,2-k)$，

因为空间三点$A(0,1,2)$，$B(1,3,5)$，$C(2,5,4-k)$在一条直线上，

所以$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$，即$\begin{cases}\lambda=2\\2\lambda=4\\3\lambda=2-k\end{cases}$ 解得$\begin{cases}\lambda=2\\k=-4\end{cases}$，

所以实数k的值是-4，

故答案为：-4.

14． $-\dfrac{1}{2}$

根据导数的几何意义，结合函数图像，确定$f(2),f'(2)$的值，根据$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，对$g(x)$求导，即可求解.

由图像可知，$f(2)=3$，切线过$(2,3)$、$(0,2)$，$f'(2)=k_{切}=\dfrac{3-2}{2-0}=\dfrac{1}{2}$

$\because g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，求导$g'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)\cdot 1}{x^2}=\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}$

$\therefore g(2)=\dfrac{f'(2)\cdot 2-f(2)}{2^2}=-\dfrac{1}{2}$

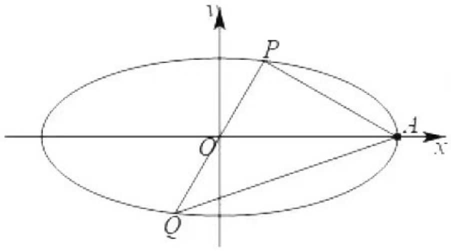
故答案为：$-\dfrac{1}{2}$

导数的几何意义：函数在某一点x_0处的导数等于在这一点处的切线的斜率.

15. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

设点P在第一象限，由对称性可知$|OP|=\frac{a}{2}$，利用锐角三角函数的定义可得出$\angle AOP=60^{\circ}$，从而可求出点P的坐标，并将点P的坐标代入椭圆C的方程，可得出a与b的等量关系，即可求出椭圆C的离心率.

不妨设点P在第一象限，O为坐标原点，由对称性可得$|OP|=\frac{1}{2}|PQ|=\frac{a}{2}$，



$\because AP\perp PQ$，则在$Rt\Delta POA$中，$\cos\angle POA=\frac{|OP|}{|OA|}=\frac{1}{2}$，故$\angle POA=60^{\circ}$，

设点$P\left(x_0, y_0\right)$，则$x_0=\frac{a}{2}\cos 60^{\circ}=\frac{a}{4}$，$y_0=\frac{a}{2}\sin 60^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{4}a$，即点$P\left(\frac{a}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)$，

将点P的坐标代入椭圆C的方程得$\frac{\left(\frac{a}{4}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2}{b}=1$，可得$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{5}$，

设椭圆的焦距为$2c\left(c>0\right)$，则椭圆C的离心率为$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故答案为：$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

本题考查椭圆离心率的计算，解题的关键就是求出椭圆上的某一点，通过将点的坐标代入椭圆方程来求出椭圆的离心率，考查运算求解能力，属于中等题.

16. 1 506

当$n=1$时，化简方程，通过构造函数的方法，找到函数零点的范围，进而可求得a_1，令$t=\frac{1}{2x_n}$，化简方程，通过构造函数的方法，找到函数零点的范围，即得t_n的范围，分类讨论n为奇数和偶数时的a_n，从而可得出答案.

解：当$n=1$时，

$8x^2+x^2\log_3 x=1(x>0)$，即 $8+\log_3 x-\frac{1}{x^2}=0$，

令 $g(x)=8+\log_3 x-\frac{1}{x^2}(x>0)$，

因为函数 $y=\log_3 x, y=-\frac{1}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上都是增函数，

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上都是增函数，

又 $g\left(\frac{1}{3}\right)=8-1-9=-2<0$， $g\left(\frac{1}{2}\right)=8-\log_3 2-4=4-\log_3 2>0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ 存在唯一零点，

即 $x_1\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$，则 $\frac{1}{2x_1}\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$，

所以 $a_1=\left[\frac{1}{2x_1}\right]=1$，

方程 $(n^2+5n+3)x^2+x^2\log_{n-2}x^n=1$，

即为 $n^2+5n+3+n\log_{n-2}x=\frac{1}{x^2}$，

即为 $\frac{1}{x^2}-n\log_{n+2}x-n^2-5n-3=0$，

令 $t=\frac{1}{2x_n}$，则 $x_n=\frac{1}{2t}$，

则有 $(2t)^2+n\log_{n-2}2t-n^2-5n-3=0$，

令 $f(t)=(2t)^2+n\log_{n+2}2t-n^2-5n-3$，

则函数 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，

因为 $f\left(\frac{n+1}{2}\right)=(n+1)^2+n\log_{n+2}(n+1)-n^2-5n-3=n\log_{n+2}(n+1)-3n-2<0$，

$f\left(\frac{n+2}{2}\right)=(n+2)^2+n-n^2-5n-3=1>0$，

所以 $\exists t\in\left(\frac{n+1}{2},\frac{n+2}{2}\right)$，使得 $f(t)=0$，

当 $n=2k-1, k\in N_+$ 时，$t_n\in\left(k,\frac{2k+1}{2}\right)$，则 $a_n=[t_n]=k$，

当 $n=2k, k\in N_+$ 时，$t_n\in\left(\frac{2k+1}{2},k+1\right)$，则 $a_n=[t_n]=k$，

当 $n=2k, k\in N_+$ 时，$\sin\frac{n\pi}{2}=0$，

所以 $S_{2022}=b_1+b_2+b_3+b_4+\cdots b_{2019}+b_{2020}+b_{2021}+b_{2022}$

$=b_1+b_3+b_5+b_7+\cdots b_{2019}+b_{2021}$

$=a_1-a_3+a_5-a_7+\cdots+a_{2017}-a_{2019}+a_{2021}$

$=(1-2)+(3-4)+\cdots+(1009-1010)+1011$

$=-1\times505+1011=506$.

故答案为：1；506.

本题考查了方程的根与函数的零点的问题，考查了数列新定义及数列求和的问题，综合性很强，对逻辑推理能力和数据分析能力要求很高，考查了分类讨论思想，难度很大.

17. $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

由题，$y'=\tan\alpha$，求出y'，结合均值不等式讨论y'的值域，即可求得$\tan\alpha$的范围，即可进一步求得α的取值范围

函数$y=\frac{4}{e^x+1}$的导数为$y'=-\frac{4e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=-\frac{4}{e^x+\frac{1}{e^x}+2}$.

因为$e^x+\frac{1}{e^x}\geq2\sqrt{e^x\cdot\frac{1}{e^x}}=2$，所以$e^x+\frac{1}{e^x}+2\geq4$，

所以$y'\in[-1,0)$，即$\tan\alpha\in[-1,0)$；因为$0<\alpha<\pi$，所以$\frac{3\pi}{4}\leq\alpha<\pi$，即$\alpha\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.

18.（1）$\{x|x<-1\text{或}x>1\}$；（2）1.

（1）先将函数解析式化为$f(x)=\begin{cases}-3x-1,x\leq-2\\-x+3,-2<x<\frac{1}{2}\\3x+1,x\geq\frac{1}{2}\end{cases}$，分别讨论$x\leq-2$，$-2<x<\frac{1}{2}$，$x\geq\frac{1}{2}$三种情况，即可得出结果；

（2）先由（1）得到$m=\frac{5}{2}$，得出$3a-4b-5=0$，根据$(a-2)^2+(b+1)^2$的几何意义，即可求出结果.

本题考查绝对值不等式的解法和点到直线的距离公式，考查分类讨论思想和转化思想.

（1）$f(x)=|2x-1|+|x+2|=\begin{cases}-3x-1,x\leq-2\\-x+3,-2<x<\frac{1}{2}\\3x+1,x\geq\frac{1}{2}\end{cases}$.

由 $f(x)>4$，可得 $\begin{cases}x\le -2\\ -3x-1>4\end{cases}$，或 $\begin{cases}-2<x<\frac{1}{2}\\ -x+3>4\end{cases}$，或 $\begin{cases}x\ge \frac{1}{2}\\ 3x+1>4\end{cases}$，

解得 $x\le -2$ 或 $-2<x<-1$ 或 $x>1$.

所以不等式的解集为 $\{x|x<-1$ 或 $x>1\}$

（2）由（1）易求得 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=3\times\frac{1}{2}+1=\frac{5}{2}$，即 $m=\frac{5}{2}$.

所以 $3a-4b=2m=5$，即 $3a-4b-5=0$.

$(a-2)^2+(b+1)^2$ 表示点 $(2,-1)$ 与点 (a,b) 的距离的平方.

又点 (a,b) 在直线 $3x-4y-5=0$ 上.

因为点 $(2,-1)$ 到直线 $3x-4y-5=0$ 的距离 $d=\frac{|2\times3-4\times(-1)-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$，

所以 $(a-2)^2+(b+1)^2$ 的最小值为 $d^2=1$.

本题考查绝对值不等式的解法和点到直线的距离公式，考查分类讨论思想和转化思想,属于中档题.

19.（1）证明见详解；（2）$\frac{2}{3}$

（1）以A为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，求出向量 $\overrightarrow{A_1B}$ 的坐标和平面 ADC_1 的一个法向量，由数量积为零即可证明结论；

（2）首先求得平面 ADC_1 与平面 ABA_1 的法向量，利用法向量的夹角求得二面角.

（1）依题意得，以A为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$D(1,1,0)$，$A_1(0,0,4)$，$C_1(0,2,4)$，所以 $\overrightarrow{A_1B}=(2,0,-4)$，

设平面 ADC_1 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，因为 $\overrightarrow{AD}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AC_1}=(0,2,4)$，

所以 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0$，即 $x+y=0$ 且 $y+2z=0$，取 $z=1$，得 $x=2$，$y=-2$，所以，$\vec{n}=(2,-2,1)$ 是平面 ADC_1 的一个法向量，

因为 $\overrightarrow{A_1B}\cdot\vec{n_1}=0$，且 $A_1B\not\subset$ 平面 ADC_1

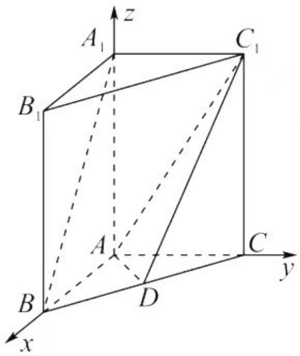
所以 A_1B // 平面 ADC_1；

（2）取平面 ABA_1 的一个法向量为 $\vec{m}=(0,1,0)$，设平面 ADC_1 与平面 ABA_1

所成二面角的大小为θ，

由$|\cos\theta|=\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\dfrac{2}{\sqrt{9}\times 1}=\dfrac{2}{3}$，

因此平面ADC_1与平面A_1BA所成的锐二面角的余弦值为$\dfrac{2}{3}$.



本题的核心在考查空间向量的应用，需要注意以下问题：

(1) 一是两平面的法向量的夹角不一定是所求的二面角，二是利用方程思想进行向量运算，要认真细心，准确计算；

(2)设$\vec{m},\vec{n}$分别为平面α，β的法向量，则二面角θ与$\langle\vec{m},\vec{n}\rangle$互补或相等，求解时一定要注意结合实际图形判断所求角是锐角还是钝角.

20．(1)61；

(2) $f(n)=2n^2-2n+1$；

(3)见解析

（1）根据列举法找规律，得到$f(6)$的值；

（2）同样根据列举法找规律$f(n+1)-f(n)=4n$，根据累加法得到$f(n)$的表达式；

（3）根据（2）的结果，代入可得$\dfrac{1}{f(n)-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)$，利用累加法求和，再根据数列的单调性证明不等式.

（1）

$f(1)=1$，$f(2)=1+4=5$，$f(3)=1+4+8=13$，$f(4)=1+4+8+12=25$，

$f(5)=1+4+8+12+16=41$，$f(6)=1+4+8+12+16+20=61$.

（2）

$\because f(2)-f(1)=4=4\times1$，$f(3)-f(2)=8=4\times2$，

$f(4)-f(3)=12=4\times3$，$f(5)-f(4)=16=4\times4$，

由上式规律得出 $f(n+1)-f(n)=4n$.

$f(n)=f(n)-f(n-1)+f(n-1)-f(n-2)+\cdots+f(3)-f(2)+f(2)-f(1)+f(1)$

$=4(n-1)+4(n-2)+\cdots+4\times2+4\times1+1$

$=4\cdot\dfrac{(1+(n-1))(n-1)}{2}+1$

$=2n^2-2n+1$

（3）

证明：当 $n\ge2$ 时，$\dfrac{1}{f(n)-1}=\dfrac{1}{2n^2-2n}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)$，

$\therefore \dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)-1}+\dfrac{1}{f(3)-1}+\cdots+\dfrac{1}{f(n)-1}=1+\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)$

$=1+\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2n}$.

$\because \dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2n}<\dfrac{3}{2}$，$\therefore$命题成立.

21.（1）$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$；（2）$2\sqrt{3}$

（1）首先求焦点坐标，再利用双曲线的定义 $2a=\left||AF_1|-|AF_2|\right|$，求双曲线方程；（2）结合余弦定理和双曲线的定义，求 $|PF_1||PF_2|$.

（1）由椭圆方程可知 $c^2=18-14=4$，

$\therefore F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，

$\because A(3,\sqrt{7})$，$\therefore 2a=\left||AF_1|-|AF_2|\right|=\left|\sqrt{(3+2)^2+(\sqrt{7})^2}-\sqrt{(3-2)^2+(\sqrt{7})^2}\right|=2\sqrt{2}$

$\therefore a^2=2$，$b^2=c^2-a^2=4-2=2$，

$\therefore$ 双曲线 C_2 的方程 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$；

（2）设点 P 在双曲线的右支上，并且设 $|PF_1|=x$，$|PF_2|=y$，

$\therefore \begin{cases} x-y=2\sqrt{2} \\ 4c^2=16=x^2+y^2-xy \end{cases}$,

变形为$(x-y)^2+xy=16 \Rightarrow 8+xy=16 \Rightarrow xy=8$,

$\therefore S_{PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$

22．(1) $y=2x-2$

(2) $\left[e-\frac{9}{e},0\right)$

（1）先求导，再求出$f'(1)$与$f(1)$，再由点斜式求解即可；

（2）$\forall x_1\in(0,e)$，$x_2\in(0,+\infty)$，都有$f(x_1)<10g(x_2)$，则$f(x)_{\max}<10g(x)_{\min}$成立，

用导数法分别研究$f(x)_{\max}, g(x)_{\min}$即可求解

(1)

当$a=1$时，$f(x)=x^2-x+\ln x$，

$f'(x)=2x-1+\frac{1}{x}$，

$\because f(1)=0$，

$\therefore$切点为$(1,0)$，

$\because f'(1)=2$，

$\therefore$切线斜率$k=2$，

$\therefore$切线方程为$y=2x-2$

(2)

$f'(x)=2x-a+\frac{1}{x}$，$x>0$．

当$a<0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

$\therefore \forall x_1\in(0,e)$，$f(x_1)<f(e)=e^2-ae+1$．

$g(x)=e^x-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}$，$x>0$，$g'(x)=\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$

令$h(x)=x^2e^x+\ln x$，$x>0$，$h'(x)=\left(x^2+2x\right)e^x+\frac{1}{x}>0$

$\therefore h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，且$h(1)=e>0$，$h\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^2}-1<0$，

$\therefore \exists x_0 \in \left(\frac{1}{e},1\right)$，使得 $h\left(x_0\right)=0$，即 $x_0^2 e^{x_0}+\ln x_0=0$，

也即 $x_0 e^{x_0}=-\frac{\ln x_0}{x_0}=\frac{1}{x_0}\ln\frac{1}{x_0}=\ln\left(\frac{1}{x_0}\right)e^{\ln\frac{1}{x_0}}$．

令 $m(x)=xe^x$，$x>0$，$m'(x)=(x+1)e^x$，

显然 $x>0$ 时，$m'(x)>0$，$m(x)$ 单调递增，

$\therefore x_0=\ln\frac{1}{x_0}$，即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$．

$\because$ 当 $x\in\left(0,x_0\right)$ 时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时，$h(x)>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

$\therefore g(x)_{\min}=g\left(x_0\right)=e^{x_0}-\frac{1}{x_0}-\frac{\ln x_0}{x_0}=x_0e^{x_0}=1$．

$\because \forall x_1\in(0,e)$，$x_2\in(0,+\infty)$，都有 $f\left(x_1\right)<10g\left(x_2\right)$，

$\therefore e^2-ae+1\le 10$，得 $a\ge e-\frac{9}{e}$，

故实数 a 的取值范围为 $\left[e-\frac{9}{e},0\right)$．

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线