苏州市 2022－2023 学年第二学期学业质量阳光指标调研卷
高一数学

2023.6.27

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. $\cos105^\circ\cos45^\circ+\sin105^\circ\sin45^\circ=$ （　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】A

【解析】$\cos105^\circ\cos45^\circ+\sin105^\circ\sin45^\circ=\cos(105^\circ-45^\circ)=\cos60^\circ=\frac{1}{2}$，故选 A

2. 已知复数 z 是一元二次方程 $x^2+2x+2=0$ 的一个根，则 $|z|=$ （　）

A. 0　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

【答案】C

【解析】$z=-1\pm i$，所以 $|z|=\sqrt{2}$，故选 C

3. 抛掷三枚质地均匀的硬币，观察它们落地时朝上的面的情况，“既有正面向上，也有反面向上”的概率为 （　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{8}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

【答案】D

【解析】三枚硬币落地朝上面的样本事件共有 $2^3=8$ 种，其中全部正面向上的有一种，全部反面向上的也是一种，

所以“既有正面向上，也有反面向上”的样本事件有 6 种，所求概率为 $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$，故选 D

4. 已知 $A(2,3)$，$B(4,-3)$，点 P 在线段 AB 的延长线上，且 $|\overrightarrow{AP}|=2|\overrightarrow{PB}|$，则点 P 的坐标为 （　）

A. $(0,9)$　　B. $(6,-9)$　　C. $\left(\frac{10}{3},-1\right)$　　D. $(6,-9)$ 或 $\left(\frac{10}{3},-1\right)$

【答案】B

【解析】由题意得，点 B 为 AP 中点，设点 $P(x,y)$，则 $\begin{cases}\frac{x+2}{2}=4\\\frac{y+3}{2}=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=6\\y=-9\end{cases}$，即点 $P(6,-9)$，故选 B

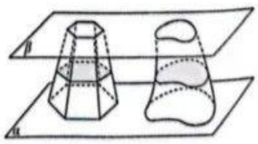
5. 中国南北朝时期数学家、天文学家祖冲之、祖暅父子总结魏晋时期著名数学家刘徽的有关工作，提出“幂势既同，则积不容异”的“祖暅原理”，其中“幂”是截面积，“势”是几何体的高．如图，已知正六棱台的上、下底面边长分别为 1 和 2，高为 $2\sqrt{3}$，一个不规则的几何体与此棱台满足“幂势既同”，则该几何体的体积为 （　）

A. $\frac{7}{2}\sqrt{33}$

B. $16\sqrt{3}$

C. $18\sqrt{3}$

D. 21



（第 5 题图）

【答案】D

【解析】因为正六棱台的上下底面为正六边形，所以 $S_{上}=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$S_{下}=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=6\sqrt{3}$，

$V_{六棱台}=\frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+6\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}\times6\sqrt{3}}\right)\times2\sqrt{3}=21$，由祖暅原理知该几何体的体积也为21，故选 D

6. 已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2$，则 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 ( )

A. $7\boldsymbol{b}$ B. $-7\boldsymbol{b}$ C. $5\boldsymbol{b}$ D. $-5\boldsymbol{b}$

【答案】B

【解析】$3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\frac{(3\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\times\vec{b}=\frac{3\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2}{|\vec{b}|}\times\vec{b}=\frac{-6-1}{1}\times\vec{b}=-7\vec{b}$，故选 B

7. 已知 $a=\frac{4}{5}$，$b=\sin\frac{2}{3}$，$c=\cos\frac{1}{3}$，则 a,b,c 的大小关系为 ( )

A. $c<b<a$ B. $a<b<c$ C. $b<a<c$ D. $b<c<a$

【答案】C

【解析】因为 $\frac{4}{5}>\frac{2}{3}>\sin\frac{2}{3}$，所以 $a>b$，$\cos\frac{1}{3}>\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{4}{5}$，所以 $c>a$，综上 $c>a>b$

故选 C

8. 用长度分别为2,3,4,5,6(单位:cm)的5根细木棒围成一个三角形(允许连接，但不允许折断)，能够得到的三角形的最大面积为 ( )

A. $8\sqrt{5}\text{cm}^2$ B. $6\sqrt{10}\text{cm}^2$ C. $15\sqrt{2}\text{cm}^2$ D. $3\sqrt{55}\ \text{cm}^2$

【答案】B

【解析】因为三角形的周长为20，所以三角形越接近等边三角形，面积越大，所以三边长为6,7,7时面积最大

此时边长为6的边上的高为 $\sqrt{7^2-3^2}=2\sqrt{10}$，面积为 $S=\frac{1}{2}\times6\times2\sqrt{10}=6\sqrt{10}$，故选 B

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 已知一组数据4,2,a,10,7的平均数为5，则此组数据的 ( )

A. 众数为2 B. 中位数为4 C. 极差为3 D. 方差为 $\frac{48}{5}$

【答案】ABD

【解析】由题意可得 $\frac{4+2+a+10+7}{5}=5\Rightarrow a=2$ 所以 A 正确；B 正确，极差为 $10-2=8$，C 错误

对于 D：$S^2=\frac{(4-5)^2+(2-5)^2+(2-5)^2+(10-5)^2+(7-5)^2}{5}=\frac{48}{5}$，D 正确

故选 ABD

10. 下列条件中能推导出 $\triangle ABC$ 一定是锐角三角形的有 ( )

A. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$ B. $\sin A:\sin B:\sin C=4:5:6$

C. $\cos A\cos B\cos C>0$ D. $\tan A\cdot\tan B=2$

【答案】BCD

【解析】对于 A，只能得到 A 为锐角，A 不正确

对于 B：最大角为 C，且 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\times4\times5}>0$，最大角 C 为锐角，所以一定是锐角三角形，B

正确；

对于C，由 $\cos A\cos B\cos C>0$，可知 $\cos A>$，$\cos B>0$，$\cos C>0$，即三个角均为锐角，C正确；

对于D，由 $\tan A\cdot\tan B=2$ 可知，$\tan A>0$，$\tan B>0$，A，B均为锐角，

$\tan C=-\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{\tan A\cdot\tan B-1}=\tan A+\tan B>0$，所以C也为锐角，所以一定为锐角三角形，D正确

故选BCD

11. 折扇是一种用竹木或象牙做扇骨、韧纸或者绫绢做扇面的能折叠的扇子（如图1），打开后形成以 O 为圆心的两个扇形（如图2），若 $\angle AOB=150^\circ$，$OA=2OC=2$，点 F 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上，$\angle BOF=120^\circ$，点 E 在 $\overset{\frown}{CD}$ 上，$\overrightarrow{OE}=x\overrightarrow{OC}+y\overrightarrow{OD}(x,y\in R)$，则　　（　　）

图1

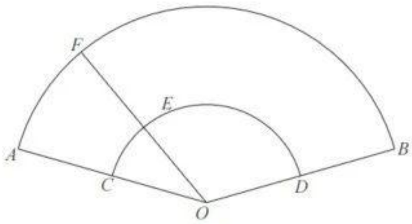


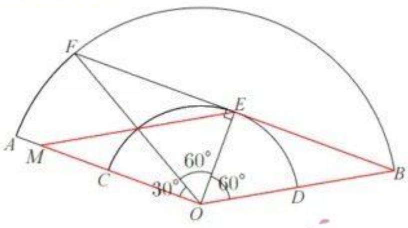
图2

A. $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{EF}$ 的取值范围为 $[-2,1]$　　B. $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{EF}$ 的取值范围为 $[-3,1]$

C. 当 $\overrightarrow{OE}\perp\overrightarrow{EF}$ 时，$x+y=1+\sqrt{3}$　　D. 当 $\overrightarrow{OE}\perp\overrightarrow{EF}$ 时，$x+y=2+\sqrt{3}$

【答案】AD

【解析】对于A，$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OE}\cdot(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE})=\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}^2=\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}-1=2\cos\angle EOF-1$，因为 $\angle EOF\in\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$，所以 $\cos\angle EOF\in\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$，所以 $2\cos\angle EOF-1\in[-2,1]$，即 $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{EF}\in[-2,1]$，A正确；B错误



对于C，如图，当 $\overrightarrow{OE}\perp\overrightarrow{EF}$ 时，可判断E为BF中点，OF=2OE=2，则 $\angle OFE=\angle AOF=30^\circ$，$OA\parallel BF$，作EM∥OB，则四边形OBEM为平行四边形，则 $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OB}$，OM=BE=EF=$\sqrt{3}$，所以 $\overrightarrow{OM}=\sqrt{3}\overrightarrow{OC}$，

$\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OD}$，所以 $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OB}=\sqrt{3}\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OD}$，所以 $x+y=2+\sqrt{3}$，C 错误，D 正确

故选AD

12. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，点 P 在线段 AC 上运动，则下列说法正确的有　　（　　）

A. $B_1P\perp BD_1$

B. 三棱锥 C_1-A_1DP 的体积为定值

C. 若 Q 为棱 BC 上一动点，则 $\triangle B_1PQ$ 的周长的最小值为 $\sqrt{3}+1$

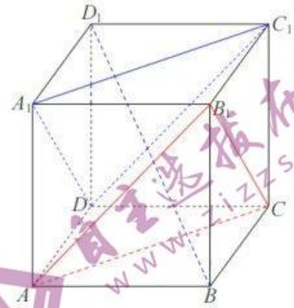
D. 过 P 作平面 α，使得 $A_1C\perp\alpha$，则 α 截正方体所得的截面可以是四边形

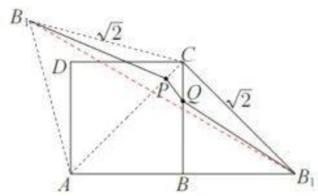
【答案】ABC

【解析】对于 A，易知正方体体对角线 $BD_1\perp$ 平面 AB_1C，因为 $B_1P\subset$ 平面 AB_1C，所以 $B_1P\perp BD_1$，A 正确；

因为平面 AB_1C // 平面 A_1DC_1，且距离为 $\frac{1}{3}BD_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$

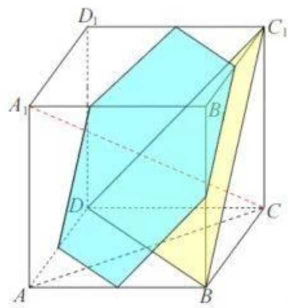
所以点 P 到平面 A_1DC_1 的距离为定值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，而 $\triangle A_1DC_1$ 面积为定值 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以三棱锥 C_1-A_1DP 的体积即为三棱锥 $P-A_1DC_1$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{6}$，B 正确





对 C，如图，将 $\triangle AB_1C$ 绕 AC 旋转，$\triangle BB_1C$ 绕 BC 旋转，使得 $\triangle AB_1C$ 与和 $\triangle BB_1C$ 与 $\triangle ABC$ 共面，如图点 P 在 AC，上点 Q 在 BC 上，若 $\triangle B_1PQ$ 周长最小，即 $B_1P+PQ+QB_1$ 最小，当 B_1,P,Q,B_1 四点共线时，$B_1P+PQ+QB_1$ 最小，在 $\triangle CB_1B_1$ 中，由余弦定理得 $B_1B_1^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\cos150^\circ=4+2\sqrt{3}$，所以 $B_1B_1=\sqrt{3}+1$，C 正确

对于 D，如图，在正方体中，与正方体体对角线垂直的截面只有两种图形，三角形与六边形，所以 D 错误



故选 ABC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知事件 A 与 B 相互独立，$P(A)=0.6$，$P(AB)=0.42$，则 $P(A+B)=$ ______

【答案】0.88

【解析】因为事件 A 与 B 相互独立，所以 $P(AB)=P(A)\times P(B)=0.6\times P(B)=0.42\Rightarrow P(B)=0.7$

所以 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.6+0.7-0.42=0.88$

14. 已知三条不同的直线 a,b,c 和两个不同的平面 α,β 满足以下条件：① $a\perp\alpha$，$b\perp\beta$；② $\alpha\cap\beta=m$；③ $c\perp a$，$c\perp b$，$c\not\subset\alpha$，$c\not\subset\beta$，则 c 与 m 的位置关系是 ______.（填“相交”，“平行”或“异面”）

【答案】平行

15. 已知棱长为4的正四面体 $A-BCD$ 的四个顶点都在同一球面上，过棱 AB 的中点 M 的一个平面截此球所得截面面积为 $k\pi(k\in N^*)$，请写出一个符合条件的 k 的值 ______.

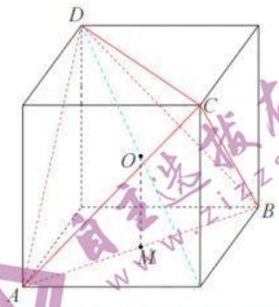
【答案】4或5或6(答案不唯一，填一个即可)

【解析】如图，棱长为4的正四面体，置入到正方体中，此正方体棱长为 $2\sqrt{2}$，四面体外接球即为此正方体外接球，球心即为正方体中心，半径 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{6}$，

则过点M的最大截面圆即为过球心时，此时截面圆半径即为球半径 $\sqrt{6}$，截面面积为 $\pi\times\sqrt{6}^2=6\pi$

当点M为截面圆圆心时，此时截面圆面积最小，最小截面圆半径为 $r=\sqrt{R^2-OM^2}=\sqrt{6-2}=2$

截面圆面积为 $\pi\times 2^2=4\pi$，所以过点M的截面圆面积取值范围为 $[4\pi,6\pi]$，所以 $k\in\{4,5,6\}$



16. 已知 α,β 为一个斜三角形的两个内角，若 $\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\cos2\beta$，则 $\tan\alpha+\tan\beta$ 的最小值为 ______

【答案】$-\frac{1}{4}$

【解析】$\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\cos2\beta\Rightarrow\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{\cos^2\beta-\sin^2\beta}{\cos^2\beta+\sin^2\beta}=\frac{1-\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}\Rightarrow\tan\alpha=\tan^2\beta$

所以 $\tan\alpha+\tan\beta=\tan^2\beta+\tan\beta=\left(\tan\beta+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\geqslant-\frac{1}{4}$，当 $\tan\beta=-\frac{1}{2}$ 时取最小值 $-\frac{1}{4}$

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分)

已知i为虚数单位，复数 $z_0=3+4i$.

(1) 若复数 z_1 满足 $z_1z_0=3z_1+z_0$，求 z_1 的虚部；

(2) 设复数 $z=(x^2-4x)+(x+2)i(x\in R)$，若复平面内表示复数 $z+\bar{z}_0$ 的点位于第二象限，求 x 的取值范围.

【解析】(1) 设 $z_1=a+bi$，则由 $z_1z_0=3z_1+z_0$ 可得 $(a+bi)(3+4i)=3(a+bi)+3+4i$，整理得 $-4b-3+(4a-4)i=0$，所以 $\begin{cases}4a-4=0\\-4b-3=0\end{cases}$，解得 $a=1,b=-\frac{3}{4}$，所以 z_1 的虚部为 $-\frac{3}{4}$

(2) $z+\bar{z}_0=(x^2-4x)+(x+2)i+3-4i=(x^2-4x+3)+(x-2)i$

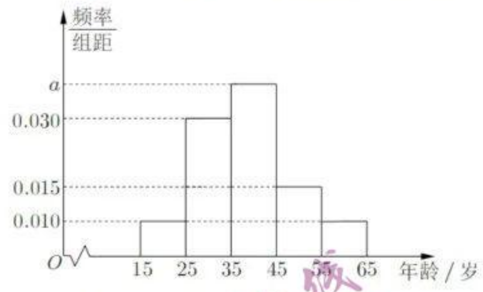
因为复平面内表示复数 $z+\bar{z}_0$ 的点位于第二象限，所以 $\begin{cases}x^2-4x+3<0\\x-2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1<x<3\\x>2\end{cases}\Rightarrow 2<x<3$

即 x 的取值范围为 $(2,3)$

18. (12分)

数字人民币在数字经济时代中体现的价值、交易媒介和支付手段职能，为各地数字经济建设提供了安全、便捷的支付方式，同时也为金融监管、金融产品设计提供更多选择性和可能性。**苏州作为全国首批数**字人民币试点城市之一，提出了2023年交易金额达2万亿元的目标. 现从使用数字人民币的市民中随

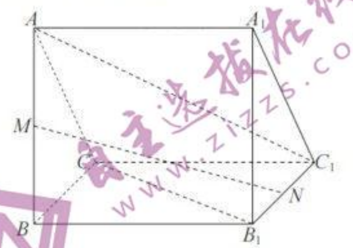
机选出200人，并将他们按年龄(单位:岁)进行分组:第1组[15,25)，第2组[25,35)，第3组[35,45)，第4组[45,55)，第5组[55,65]，得到如图所示的频率分布直方图.



(1) 求直方图中 a 的值和第25百分位数;
(2) 在这200位市民中用分层随机抽样的方法从年龄在[25,35)和[45,55)内抽取6位市民做问卷调查，并从中随机抽取两名幸运市民，求两名幸运市民年龄都在[25,35)内的概率.

【解析】(1) $(a+0.03+0.015+0.01\times 2)\times 10=1\Rightarrow a=0.035$
因为第一组的频率为 $0.01\times 10=0.1, 0.1<0.25$，第二组的频率为 $0.03\times 10=0.3, 0.1+0.3>0.25$
所以第25百分位数在第二组，设为 x，则 $0.1+\frac{x-25}{10}\times 0.3=0.25\Rightarrow x=30$
所以第25百分位数为30
(2) 年龄在[25,35)的市民人数为 $200\times 0.3=60$，年龄在[45,55)的市民人数为 $200\times 0.15=30$，
用分层随机抽样的方法抽取年龄在[25,35)的人数为 $6\times\frac{60}{60+30}=4$ 人，年龄在[45,55)的人数为 $6\times\frac{30}{60+30}=2$ 人，设年龄在[25,35)的4人为 A,B,C,D，年龄在[45,55)的2人为 E,F
从这6为市民中抽取两名的样本事件为
$\{(AB),(AC),(AD),(AE),(AF),(BC),(BD),(BE),(BF),(CD),(CE),(CF),(DE),(DF),(EF)\}$ 共15种，
其中2名年龄都在[25,35)内的样本事件有 $\{(AB),(AC),(AD),(BC),(BD),(CD)\}$ 6种，
所以两名幸运市民年龄都在[25,35)内的概率为 $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

19. (12分)
如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BB_1C_1C 是菱形，平面 $ABC\perp$ 平面 BB_1C_1C, $AB\perp BC$, M 和 N 分别是 AB 和 B_1C_1 的中点.
(1) 求证: $MN\parallel$ 平面 AA_1C_1C;
(2) 求证: $B_1C\perp AC_1$.

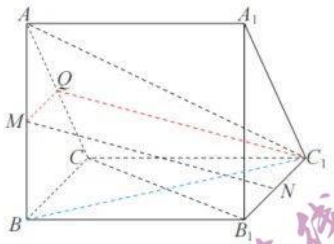


【解析】(1) 取 AC 中点为Q，连结 MQ, C_1Q，因为M为AB中点，所以 $MQ \underline{\parallel} \frac{1}{2}BC$,

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BC \underline{\parallel} B_1C_1$，因为N为$B_1C_1$中点，所以 $NC_1 \underline{\parallel} \frac{1}{2}BC$，所以 $MQ \underline{\parallel} NC_1$

所以四边形MQC_1N为平行四边形，所以 $MN\parallel C_1Q$，$C_1Q\subset$平面AA_1C_1C，$MN\not\subset$平面AA_1C_1C

所以 $MN\parallel$ 平面 AA_1C_1C



(2) 连结 B_1C，因为四边形 BB_1C_1C 是菱形，所以 $B_1C\perp BC_1$，

又因为平面 $ABC\perp$ 平面 BB_1C_1C，平面 $ABC\cap$ 平面 $BB_1C_1C=BC$，$AB\subset$ 平面 ABC，$AB\perp BC$

所以 $AB\perp$ 平面 BB_1C_1C，$B_1C\subset$ 平面 BB_1C_1C，所以 $AB\perp B_1C$，$AB\cap BC_1=B$，AB、$BC_1\subset$ 平面 ABC_1

所以 $B_1C\perp$ 平面 ABC_1，$AC_1\subset$ 平面 ABC_1，所以 $B_1C\perp AC_1$

20.(12分)

已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sin x,\cos x)$，$\boldsymbol{b}=(\cos x,\sqrt{3}\cos x)$，函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 若 $f\left(\frac{x_0}{2}\right)=-\frac{1}{3}$，且 $x_0\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，求 $\sin x_0$ 的值；

(2) 已知 $A(-3,2)$，$B(3,10)$，将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象．在 $g(x)$ 的图象上是否存在一点 P，使得 $AP\perp BP$？若存在，求出所有符合条件的点 P 的坐标；若不存在，说明理由．

【解析】$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2x-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\cos 2x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

(1) $f\left(\frac{x_0}{2}\right)=\sin\left(x_0+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{3}$，因为 $x_0\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $x_0+\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，而 $\sin\left(x_0+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{3}<0$，

所以 $x_0+\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$，所以 $\cos\left(x_0+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(x_0+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

所以 $\sin x_0=\sin\left[\left(x_0+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\frac{1}{2}\sin\left(x_0+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(x_0+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1+2\sqrt{6}}{6}$

(2) 由题意得 $g(x)=\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2x$，假设 $g(x)$ 的图象上存在点 $P(x_1,\cos 2x_1)$ 使得 $AP\perp BP$，

因为 $\overrightarrow{AP}=(x_1+3,\cos 2x_1-2)$，$\overrightarrow{BP}=(x_1-3,\cos 2x_1-10)$，

因为 $AP\perp BP$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(x_1+3)(x_1-3)+(\cos 2x_1-2)(\cos 2x_1-10)=x_1^2+\cos^2 2x_1-12\cos 2x_1+11=0$

令 $h(x_1)=x_1^2+\cos^2 2x_1-12\cos 2x_1+11=x_1^2+(\cos 2x_1-6)^2-25$，因为 $\cos 2x_1\in[-1,1]$，

所以 $h(x_1)=x_1^2+(\cos 2x_1-6)^2-25\geqslant x_1^2+(1-5)^2-25=x_1^2\geqslant 0$，当且仅当 $\begin{cases}x_1=0\\ \cos 2x_1=1\end{cases}$ 时取等

所以 $h(x_1)=0$ 有唯一解 $x_1=0$，此时 $\cos 2x_1=1$，点 $P(0,1)$

综上，符合条件的点P坐标为 $(0,1)$

21.(12分)

《几何原本》是古希腊数学家欧几里得创作的一部传世巨著，该书以基本定义、公设和公理作为推理的出发点，第一次实现了几何学的系统化、条理化，成为用公理化方法建立数学演绎体系**的最早典范．书中**第Ⅰ卷第47号命题是著名的毕达哥拉斯定理（勾股定理），证明过程中以直角三角形 ABC 中的各边为边

分别向外作了正方形(如图1). 某校数学兴趣小组对上述图形结构作拓广探究, 提出了如下问题, 请帮忙解答.

问题: 如图2, 已知$\triangle ABC$满足$AC=2\sqrt{2}, AB=2$, 设$\angle BAC=\theta(0<\theta<\pi)$, 四边形$ABGF$、四边形$ACED$、四边形$BCQP$都是正方形.

(1) 当$\theta=\frac{\pi}{2}$时, 求EQ的长度;

(2) 求AQ长度的最大值.

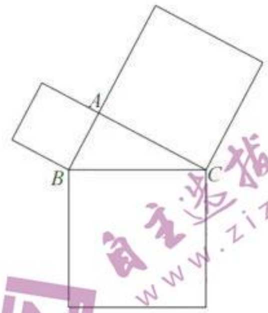


图1

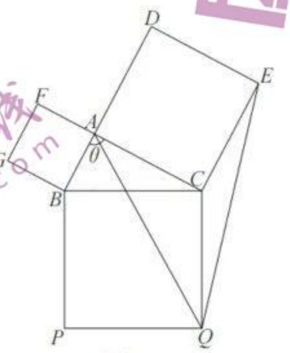


图2

【解析】(1) 在$\triangle ABC$中, $AC=2\sqrt{2}, AB=2, \angle BAC=\frac{\pi}{2}$, 则$BC=2\sqrt{3}$, $\cos\angle ACB=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,

因为$\angle ACB+\angle ECQ=\pi$, 所以$\cos\angle ECQ=\cos(\pi-\angle ACB)=-\cos\angle ACB=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

在$\triangle ECQ$中, $CE=AC=2\sqrt{2}, CQ=BC=2\sqrt{3}$,

由余弦定理$EQ^2=CE^2+CQ^2-2CE\times CQ\times\cos\angle ACB=8+12-2\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)=36\Rightarrow EQ=6$

(2) 在$\triangle ABC$中, 由余弦定理得$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\theta$, 所以$BC^2=12-8\sqrt{2}\cos\theta$,

设$\angle ACB=\alpha$, 在$\triangle ACQ$中, 由余弦定理得$AQ^2=AC^2+CQ^2-2AC\cdot CQ\cdot\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$,

所以$AQ^2=8+12-8\sqrt{2}\cos\theta+4\sqrt{2}\cdot CQ\cdot\sin\alpha$ ①

在$\triangle ABC$中, 由正弦定理得$\frac{AB}{\sin\alpha}=\frac{BC}{\sin\theta}$,

所以$CQ\cdot\sin\alpha=BC\cdot\sin\alpha=AB\cdot\sin\theta=2\sin\theta$,

代入①可得$AQ^2=20-8\sqrt{2}\cos\theta+8\sqrt{2}\sin\theta=20+16\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)(0<\theta<\pi)$,

所以当$\theta=\frac{3\pi}{4}$时, AQ^2的最大值为$20+16=36$,

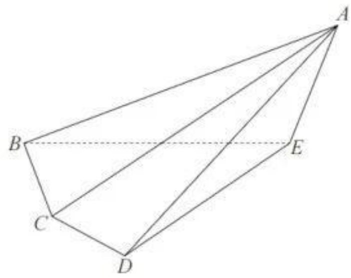
所以AQ长度的最大值为6.

22. (12分)

如图, 在四棱锥$A-BCDE$中, $DE=3, AE=2, BC=CD=1, \angle BCD=\angle CDE=\frac{2\pi}{3}, \angle AEB=\frac{\pi}{2}$

(1) 当$AB\perp BC$时, 求直线AB与平面$BCDE$所成角的大小;

(2) 当二面角$A-BE-C$为$\frac{\pi}{3}$时, 求平面ABC与平面ADE所成二面角的正弦值.



【解析】(1) 延长 BC,ED 交于点 F，连接 AF.

因为 $\angle BCD=\angle CDE=\frac{2\pi}{3}$，所以 $\angle FCD=\angle FDC=\frac{\pi}{3}$，故 $\triangle CDF$ 为等边三角形，

所以 $CF=DF=1,\angle F=\frac{\pi}{3}$. 因为 $DE=3,BC=1$，所以 $BF=1+1=2,EF=1+3=4$.

在 $\triangle BEF$ 中，由余弦定理得 $BE^2=BF^2+EF^2-2BF\cdot EF\cos\angle BFE=12$，所以 $BE=2\sqrt{3}$，

所以 $BF^2+BE^2=EF^2$，所以由勾股定理逆定理得 $BC\perp BE$.

因为 $AB\perp BC,AB\cap BE=B,AB,BE\subset$ 平面 ABE，所以 $BC\perp$ 平面 ABE.

因为 $AE\subset$ 平面 ABE，所以 $BC\perp AE$.

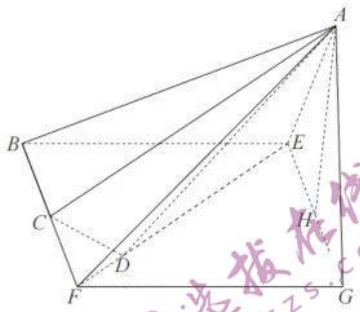
因为 $AE\perp BE,BE\cap BC=B,BE,BC\subset$ 平面 $BCDE$，

所以 $AE\perp$ 平面 $BCDE$，

所以 $\angle ABE$ 即为直线 AB 与平面 $BCDE$ 的所成角，

在直角三角形 AEB 中，$\tan\angle ABE=\frac{AE}{BE}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故直线 AB 与平面 $BCDE$ 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$.



(2) 过 E,F 分别作 BC,BE 的平行线交于点 G，连结 AG，

取 EG 的中点 H，连结 AH.

因为 $BC\perp BE,EG\parallel BC$，所以 $EG\perp BE$.

又因为 $AE\perp BE$，所以 $\angle AEG$ 即为二面角 $A-BE-C$ 的平面角，即 $\angle AEG=\frac{\pi}{3}$.

在 $\triangle AEG$ 中，因为 $AE=EG=2,\angle AEG=\frac{\pi}{3}$，

所以 $AH\perp EG$，且 $AH=\sqrt{3},AG=2$.

因为 $AE\perp BE,EG\perp BE,FG\parallel BE$，所以 $AE\perp FG,EG\perp FG$，

又因为 $AE\cap EG=E,AE,EG\subset$ 平面 AEG，所以 $FG\perp$ 平面 AEG.

因为 $AG\subset$ 平面 AEG，所以 $FG\perp AG$.

在 $\triangle AFG$ 中，$AG=2,FG=2\sqrt{3},\angle AGF=\frac{\pi}{2}$，所以 $AF=4$.

在 $\triangle AEF$ 中，$AE=2,EF=AF=4$，所以 $S_{\triangle AEF}=\sqrt{15}$. 易求得 $S_{\triangle BEF}=2\sqrt{3}$.

设点 B 到平面 AEF 和边 AF 的距离分别为 d_1,d_2，

因为 $V_{A-BEF}=V_{B-AEF}$，所以 $\frac{1}{3}S_{\triangle BEF}\cdot AH=\frac{1}{3}S_{\triangle AEF}\cdot d_1$，即 $2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\sqrt{15}\times d_1$，所以 $d_1=\frac{6}{\sqrt{15}}$.

因为 $S_{\triangle ABF}=S_{\triangle AEF}$，所以 $\frac{1}{2}\times 4\times d_2=\sqrt{15}$，所以 $d_2=\frac{\sqrt{15}}{2}$.

设平面 ABC 与平面 ADE 所成二面角的大小为 θ，则 $\sin\theta=\frac{d_1}{d_2}=\frac{6}{\sqrt{15}}\times\frac{2}{\sqrt{15}}=\frac{4}{5}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。