（在此卷上答题无效）

绝密 ★ 启用前

2021 届“江南十校”一模联考

数学（理科）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名和座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A=\{x\mid x^2-5x-6>0\}$，集合 $B=\{x\mid 4<x\leq 7\}$，则 $A\cup B=$

A. $(6,7]$　　B. $(4,7]$

C. $(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$　　D. $(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$

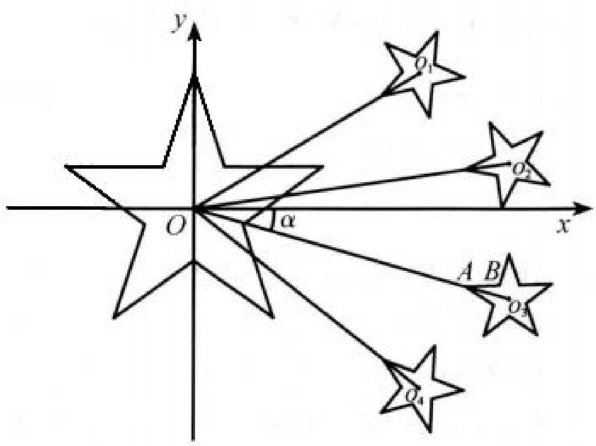
2. 已知复数 $z=1+i$，$\bar{z}$ 是 z 的共轭复数，若 $\bar{z}\cdot a=2+bi$，其中 a,b 均为实数，则 b 的值为

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

3. 已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$，则 $\tan 2\alpha=$

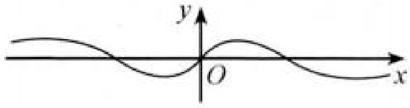
A. $-\frac{24}{7}$　　B. $-\frac{24}{25}$　　C. $\frac{24}{25}$　　D. $\frac{24}{7}$

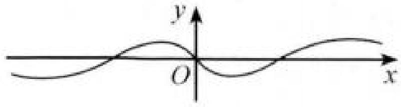
4. 2020 年 12 月 4 日，嫦娥五号探测器在月球表面第一次动态展示国旗. 1949 年公布的《国旗制法说明》中就五星的位置规定：大五角星有一个角尖正向上方，四颗小五角星均各有一个角尖正对大五角星的中心点. 有人发现，第三颗小星的姿态与大星相近. 为便于研究，如图，以大星的中心点为原点，建立直角坐标系，OO_1，OO_2，OO_3，OO_4 分别是大星中心点与四颗小星中心点的联结线，$\alpha\approx16°$，则第三颗小星的一条边 AB 所在直线的倾斜角约为

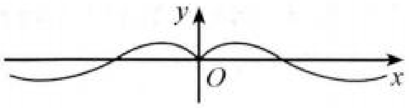


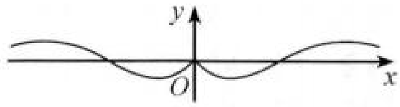
A. 0°　　B. 1°　　C. 2°　　D. 3°

5. 函数 $f(x)=\dfrac{x\cos x}{2^{|x|}}$ 的图象大致为

A. 

B. 

C. 

D. 

6. 已知 F 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点,O 为坐标原点,P 为椭圆 C 上一点,若 $|OP|=|OF|$,$\angle POF=120^\circ$,则椭圆 C 的离心率为

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\sqrt{2}-1$　　D. $\sqrt{3}-1$

7. 现有5名志愿者被分配到3个不同巡查点进行防汛抗洪志愿活动,要求每人只能去一个巡查点,每个巡查点至少有一人,则不同分配方案的总数为

A. 120　　B. 150　　C. 240　　D. 300

8. 将数列$\{3n-1\}$与$\{2^n+1\}$的公共项从小到大排列得到数列$\{a_n\}$,则$\{a_n\}$的第 10 项为

A. $2^{10}-1$　　B. $2^{10}+1$　　C. $2^{20}-1$　　D. $2^{20}+1$

9. 已知函数 $f(x)=e^{|\ln x|}$,$a=f(1)$,$b=f(\log_2\sqrt{3})$,$c=f(2^{1.2})$,则

A. $b>c>a$　　B. $c>b>a$　　C. $c>a>b$　　D. $b>a>c$

10. 在 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,$a=c\sin B$,则 $\tan A$ 的最大值为

A. 1　　B. $\dfrac{5}{4}$　　C. $\dfrac{4}{3}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

11. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,O 为正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心,P,M,N 分别为 DD_1,AB,BC 的中点,则四面体 $OPMN$ 的体积为

A. $\dfrac{5}{12}$　　B. $\dfrac{5}{6}$　　C. $\dfrac{5\sqrt{2}}{12}$　　D. $\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$

12. 已知函数 $f(x)=e\log_a x-a^{\frac{x}{e}}(a>1)$ 没有零点,则实数 a 的取值范围为

A. $(e,+\infty)$　　B. $(\sqrt{e},+\infty)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(e^{\frac{1}{e}},+\infty)$

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上周期为 2 的函数,当 $x\in(-1,1]$ 时,

$f(x)=\begin{cases}x^2+2x+m, & -1<x<0,\\ \sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ 其中 $m\in\mathbf{R}$. 若 $f(\dfrac{1}{16})=f(\dfrac{3}{2})$,则 m 的值是______.

14. 已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为______.

15. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为矩形,平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$,$PA=PB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB$,若 $\triangle PBC$ 和 $\triangle PCD$ 的面积分别为 1 和$\sqrt{3}$,则四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的表面积为______.

16. 已知 F_1,F_2 为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，过 F_2 作倾斜角为$60°$的直线 l 交双曲线右支于 A,B 两点（A 在 x 轴上方），则 $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆半径 r_1 与 $\triangle BF_1F_2$ 的内切圆半径 r_2 之比$\frac{r_1}{r_2}$为______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17 ~ 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

已知 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，$a_1=1,S_n=a_{n+1}-1$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

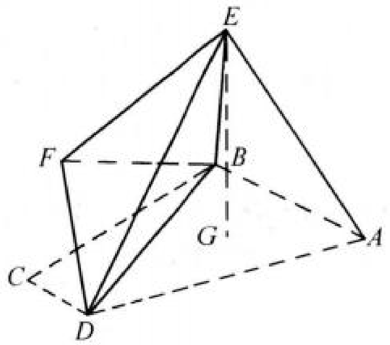
（2）若数列$\{b_n\}$满足$2b_{n+1}+S_{n+1}=2b_n+2a_n$，证明数列$\{a_n+b_n\}$为等差数列，并求其公差.

18.（12 分）

如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD,BC=CD=\sqrt{2}$，且 $BC\perp CD$. 以 BD 为折痕把 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 向上折起，使点 A 到达点 E 的位置，点 C 到达点 F 的位置（E,F 不重合）.

（1）求证：$EF\perp BD$；

（2）若平面 $EBD\perp$ 平面 FBD，点 E 在平面 $ABCD$ 内的正投影 G 为 $\triangle ABD$ 的重心，且直线 EF 与平面 FBD 所成角为$60°$，求二面角 $A-BE-D$ 的余弦值.



19.（12 分）

为了调查某地区全体高中生的身高信息（单位：cm），从该地区随机抽取高中学生 100 人，其中男生 60 人，女生 40 人. 调查得到样本数据 $x_i(i=1,2,\cdots 60)$ 和 $y_j(j=1,2,\cdots 40)$，x_i 和 y_j 分别表示第 i 个男生和第 j 个女生的身高. 经计算得 $\sum_{i=1}^{60}x_i=10500$，$\sum_{i=1}^{60}x_i^2=1838400$，$\sum_{j=1}^{40}y_j=6600$，$\sum_{j=1}^{40}y_j^2=1090200$.

（1）请根据以上信息，估算出该地区高中学生身高的平均数 $\bar{z}$ 和方差 s^2；

（2）根据以往经验，可以认为该地区高中学生身高 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，用$\bar{z}$作为μ的估计值，用s^2作为σ^2的估计值. 若从该地区高中学生中随机抽取 4 人，记ξ表示抽取的 4 人中身高在$(171,184.4)$的人数，求ξ的数学期望.

附:(1) 数据 $t_1,t_2,\cdots t_n$ 的方差 $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2=\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}t_i^2-n\bar{t}^2)$,

(2) 若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,则 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0.6827$;

$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.9545$;$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)=0.9973$;$\sqrt{45}\approx6.7$.

20. (12 分)

已知动圆 P 与 x 轴相切且与圆 $x^2+(y-2)^2=4$ 相外切,圆心 P 在 x 轴的上方,P 点的轨迹为曲线 C.

(1) 求 C 的方程;

(2) 已知 $E(4,2)$,过点 $(0,4)$ 作直线交曲线 C 于 A,B 两点,分别以 A,B 为切点作曲线 C 的切线相交于 D,当 $\triangle ABE$ 的面积 S_1 与 $\triangle ABD$ 的面积 S_2 之比 $\frac{S_1}{S_2}$ 取最大值时,求直线 AB 的方程.

21. (12 分)

已知函数 $f(x)=2e^x+a\ln(x+1)-2$.

(1) 当 $a=-2$ 时,讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x\in[0,\pi]$ 时,$f(x)\geqslant\sin x$ 恒成立,求 a 的取值范围.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22. [选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=-\frac{1}{2}t,\\ y=1+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数). 以坐标原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\left[k-1+3\sin^k(\frac{k\pi}{4}+\theta)\right]\rho^k=4$.

(1) 当 $k=1$ 时,求 C_1 和 C_2 的直角坐标方程;

(2) 当 $k=2$ 时,C_1 与 C_2 交于 A,B 两点,设 P 的直角坐标为 $(0,1)$,求 $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}$ 的值.

23. [选修 4—5:不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|x-2|+|x+1|$.

(1) 解不等式 $f(x)>x+2$;

(2) 记 $f(x)$ 的最小值为 m,正实数 a,b,c 满足 $a+b+c=m$,

证明:$\sqrt{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}\geqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$.

2021届“江南十校”一模联考

数学（理科）参考答案及评分细则

一、选择题

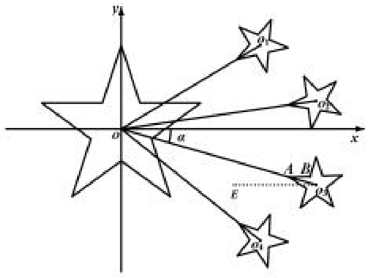
题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	A	C	A	D	B	D	B	C	B	A

1.C 【解析】$A=(-\infty,-1)\cup(6,+\infty)$，所以 $A\cup B=(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$，故选 C.

2.A 【解析】由题意得 $\bar{z}=\dfrac{2+bi}{a}=\dfrac{2}{a}+\dfrac{b}{a}\mathrm{i}=1-\mathrm{i}$，所以 $\dfrac{2}{a}=1$ 且 $\dfrac{b}{a}=-1$，则 $b=-2$，故选 A.

3.A 【解析】因为 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ 且 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi$，所以 $\tan\alpha=-\dfrac{3}{4}$，故 $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\dfrac{24}{7}$，故选 A.

4.C 【解析】过 O_3 作 x 轴平行线 O_3E，则 $\angle OO_3E=\alpha\approx16^\circ$.由五角星的内角为 36°，可知 $\angle BAO_3=18^\circ$，所以直线 AB 的倾斜角为 $18^\circ-16^\circ=2^\circ$，故选 C.



5.A 【解析】因为 $x\in R$ 且 $f(-x)=\dfrac{(-x)\cos(-x)}{2^{|-x|}}=-\dfrac{x\cos x}{2^{|x|}}=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数，排除 C，D；又易知 $f(\dfrac{\pi}{2})=0, f(\dfrac{\pi}{4})>0$，故选 A.

6. D 【解析】记椭圆 C 的左焦点为 E，在△POF 中，可得 $|PF|=\sqrt{3}c$，在△POE 中，可得 $|PE|=c$，故 $|PE|+|PF|=(\sqrt{3}+1)c=2a$，故 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$，故选 D.

7. B 【解析】$C_5^3A_3^3+\dfrac{C_5^2C_3^2}{2}A_3^3=150$，故选 B.

8. D 【解析】由 $\{a_n-1\}$ 是首项为 4，公比为 4 的等比数列，可求得 $a_n-1=4^n$，即 $a_n=4^n+1$，

故 $a_{10}=4^{10}+1=2^{20}+1$，故选 D.

9. B 【解析】$a=f(1)=e^0=1$，$b=\log_{\sqrt{3}}2\in(1,2)$，$c=2^{1.2}>2$，故 $c>b>a$，故选 B.

10.C 【解析】在△ABC 中，由 $a=c\sin B$ 及正弦定理得：$\sin A=\sin C\sin B$.因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $\sin A=\sin(A+B)\sin B=\sin B\cos B\sin A+\sin^2 B\cos A$

$$=\frac{\sin 2B}{2}\cdot\sin A+\frac{1-\cos 2B}{2}\cdot\cos A,$$

故 $2\tan A=\tan A\cdot\sin 2B-\cos 2B+1=\sqrt{\tan^2 A+1}\sin(2B-\varphi)+1\leqslant\sqrt{\tan^2 A+1}+1$. 当 $\tan A\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，

不等式显然成立；当 $\tan A>\frac{1}{2}$ 时，$(2\tan A-1)^2\leqslant\tan^2 A+1$，解得 $\tan A\leqslant\frac{4}{3}$，所以 $\tan A$ 的最大值为 $\frac{4}{3}$，故选 C.

（另解：由 $a=c\sin B$ 得 $\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{2}ac\sin B=S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah$，所以边 BC 上的高 h 等于 a，由数形结合思想可知，当 $AB=AC=\frac{\sqrt{5}}{2}a$ 时，$\tan A$ 取最大值 $\frac{4}{3}$.）

11. B 【解析】连接 BD, MN 交于点 Q，$V_{O-PMN}=V_{M-OPQ}+V_{N-OPQ}=\frac{1}{3}S_{\triangle OPQ}\cdot MN$

$=\frac{1}{3}\times\frac{5\sqrt{2}}{4}\times\sqrt{2}=\frac{5}{6}$，故选 B.

12. A 【解析】$f(x)=e\log_a x-a^{\frac{x}{e}}=\log_{a^{\frac{1}{e}}}x-(a^{\frac{1}{e}})^x$，令 $b=a^{\frac{1}{e}}(b>1)$，因为 $y=\log_b x$ 与 $y=b^x$ 关于 $y=x$ 对称，所以 $f(x)=e\log_a x-a^{\frac{x}{e}}$ 没有零点等价于 $g(x)=\log_b x-b^x(b>1)$ 没有零点，等价于 $h(x)=b^x-x(b>1)$ 没有零点. $h'(x)=b^x\ln b-1$，令 $h'(x)=0$ 得 $x=\log_b(\frac{1}{\ln b})$，

$h(x)\geq h(\log_b(\frac{1}{\ln b}))=b^{\log_b(\frac{1}{\ln b})}-\log_b(\frac{1}{\ln b})>0$，所以 $b>e^{\frac{1}{e}}$，故 $a>e$，选 A.

（另解：通过 $y=b^x$ 与 $y=x$ 相切求解.）

二、填空题

13. 1 【解析】$f(\frac{1}{16})=\frac{1}{4}$，$f(\frac{3}{2})=f(\frac{3}{2}-2)=f(-\frac{1}{2})=m-\frac{3}{4}$，由 $m-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ 可得 $m=1$.

14. $\frac{\pi}{4}$ 【解析】由数形结合可知 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

15. 6π 【解析】在四棱锥 P-$ABCD$ 中，因为 $PA=PB=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$，所以△$PAB$ 是等腰直角三角形.因为底面 $ABCD$ 为矩形，所以 $BC\perp AB$，又因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $BC\perp$ 平面 PAB，故 $BC\perp PB$.设 $PA=PB=a$，$BC=b$，由直角△PBC 和等腰△PCD 的面积分别为 1 和 $\sqrt{3}$ 得，$\frac{1}{2}ab=1$ 且 $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}a\cdot\sqrt{\frac{a^2}{2}+b^2}=\sqrt{3}$，

解得 $a=b=\sqrt{2}$.易求得四棱锥 P-$ABCD$ 的外接球的半径为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以四棱锥 P-$ABCD$ 的外接球的表面积为 6π.

（另解：可将四棱锥 P-$ABCD$ 的外接球还原成正方体的外接球.）

16. 3 【解析】由内切圆的性质可知，$\triangle AF_1F_2$ 的内切圆 O_1 和 $\triangle BF_1F_2$ 的内切圆 O_2 都与 x 轴相切于双曲线的右顶点 C，易知 O_1，C，O_2 三点共线.连接 O_1O_2 交 AB 于 D 点，解三角形

得 $O_1D=2r_1=2r_2+r_2+r_1$，则 $\dfrac{r_1}{r_2}$ 为 3.

三、解答题

17.解：

（1）由已知得，当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=a_n-1$.所以 $S_n-S_{n-1}=a_{n+1}-1-(a_n-1)$，即 $a_{n+1}=2a_n(n\geqslant 2)$，

又因为 $S_1=a_2-1$，所以 $a_2=2=2a_1$.

综上，$\{a_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，$a_n=2^{n-1}$.　　（6 分）

（2）由（1）及题设得 $2b_{n+1}+S_{n+1}=2b_n+2a_n$，且 $S_{n+1}=a_{n+2}-1=2a_{n+1}-1$.　　（8 分）

所以 $2b_{n+1}+2a_{n+1}-1=2b_n+2a_n$，即 $b_{n+1}+a_{n+1}=b_n+a_n+\dfrac{1}{2}$，

所以 $\{a_n+b_n\}$ 是以 $\dfrac{1}{2}$ 为公差的等差数列.　　（12 分）

18.解：

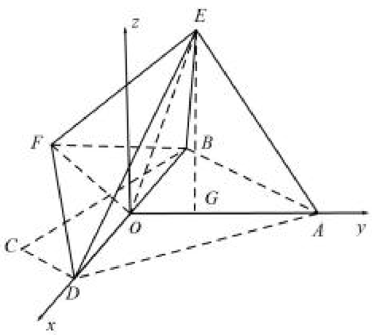
（1）取 BD 的中点 O，连接 FO，EO.

由题意知$\triangle FBD$ 和$\triangle BED$ 均为等腰三角形，且 $BF=DF$，$BE=ED$.

故 $FO\perp BD$，$EO\perp BD$．又因为 $FO\cap EO=O$，所以 $BD\perp$ 平面 EFO.

又因为 $EF\subset$ 平面 EFO，所以 $EF\perp BD$.　　（5 分）

（2）由（1）知，$EO\perp BD$，又因为平面 $EBD\perp$ 平面 FBD，平面 $EBD\cap$ 平面 $FBD=BD$，$EO\subset$ 平面 EBD，所以 $EO\perp$ 平面 FBD，直线 EF 与平面 FBD 所成角为 $\angle EFO$，则 $\angle EFO=60°$. 因为 $FB=FD=\sqrt{2}$，$FB\perp FD$，O 为 BD 中点，所以 $FO=\dfrac{1}{2}BD=1$，所以 $EO=\sqrt{3}$，所以 $BE=ED=BD=2$，即$\triangle EBD$ 为等边三角形，G 为等边$\triangle ABD$ 的中心.



以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OD}$ 的方向为 x 轴正方向，$\overrightarrow{OG}$ 的方向为 y 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$. 由题可得 $A(0,\sqrt{3},0)$，

$B(-1,0,0)$，$D(1,0,0)$，$E(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$，　　（8 分）

$\overrightarrow{AB}=(-1,-\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{BD}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{BE}=(1,\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$.

设 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$ 为平面 ABE 的法向量，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}-x-\sqrt{3}y=0,\\ x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}y+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}z=0.\end{cases}\text{可取 }\boldsymbol{n}_1=(-\sqrt{6},\sqrt{2},1).$$

设 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$ 为平面 BED 的法向量，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overline{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overline{BE}=0,\end{cases}$$ 即 $$\begin{cases}2x=0,\\ x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}y+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}z=0.\end{cases}$$ 可取 $\boldsymbol{n}_2=(0,2\sqrt{2},-1)$.

因为 $\cos<\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2>=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{0+4-1}{\sqrt{6+2+1}\cdot\sqrt{0+8+1}}=\dfrac{1}{3}$,

所以二面角 A-BE-D 的余弦值为 $\dfrac{1}{3}$.

（也可由三棱锥 E-ABD 为正四面体求得二面角 A-BE-D 的余弦值为 $\dfrac{1}{3}$）（12 分）

19. 解：

（1）$\bar{z}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{60}x_i+\sum\limits_{j=1}^{40}y_j}{100}=171$，$s^2=\dfrac{1}{100}\left[\sum\limits_{i=1}^{60}x_i^2+\sum\limits_{j=1}^{40}y_j^2-100\bar{z}^2\right]=45$.（6 分）

（2）该地区高中学生身高 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，其中 $\mu=171$，$\sigma^2=45$.

$P(171<X<184.4)=P(\mu<X<\mu+2\sigma)=\dfrac{0.9545}{2}=0.47725$，（9 分）

由题意可知 $\xi\sim B(4,0.47725)$，所以 ξ 的数学期望为 $E(\xi)=4\times0.47725=1.909$.（12 分）

20. 解：

（1）由题意知，P 到点 $(0,2)$ 的距离等于它到直线 $y=-2$ 的距离，

由抛物线的定义知，圆心 P 的轨迹是以 $(0,2)$ 为焦点，以 $y=-2$ 为准线的抛物线（除去坐标原点），则 C 的方程为：$x^2=8y(x\neq0)$.（5 分）

（3）由题意知，$E(4,2)$ 在曲线 C 上，直线 AB 的斜率存在，设 AB 方程为 $y=kx+4$，因为直线 AB 不经过 E 点，所以 $k\neq-\dfrac{1}{2}$.

由 $\begin{cases}y=kx+4\\ x^2=8y\end{cases}$，可得 $x^2-8kx-32=0$，

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=8k$，$x_1\cdot x_2=-32$，

以 A 为切点的切线方程为 $y-y_1=\dfrac{x_1}{4}(x-x_1)$，即 $y=\dfrac{x_1}{4}x-\dfrac{x_1^2}{8}$，

同理以 B 为切点的切线为 $y=\dfrac{x_2}{4}x-\dfrac{x_2^2}{8}$，

由 $\begin{cases} y=\dfrac{x_1}{4}x-\dfrac{x_1^2}{8}, \\ y=\dfrac{x_2}{4}x-\dfrac{x_2^2}{8} \end{cases}$ 解得交点 $D(4k,-4)$，　　（9 分）

设 E 到 AB 的距离为 d_1，D 到 AB 的距离为 d_2，

则 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{d_1}{d_2}=\dfrac{\dfrac{|4k-2+4|}{\sqrt{k^2+1}}}{\dfrac{|4k^2+4+4|}{\sqrt{k^2+1}}}=\dfrac{|2k+1|}{|2k^2+4|}$，

设 $2k+1=t\ (t\neq 0)$，则 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{2}{\left|t+\dfrac{9}{t}-2\right|}$，当 $t=3$ 即 $k=1$ 时，$\dfrac{S_1}{S_2}$ 取最大值，

直线 AB 的方程为 $x-y+4=0$．（12 分）

21．解：

（1）当 $a=-2$ 时，$f(x)=2e^x-2\ln(x+1)-2$，$x>-1$．

$f'(x)=2e^x-\dfrac{2}{x+1}$，$f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 单调递增，且 $f'(0)=0$．

当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$．

所以函数 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增．　　（5 分）

（2）令 $g(x)=f(x)-\sin x=2e^x+a\ln(x+1)-2-\sin x$，$x\in[0,\pi]$．

当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)\geqslant\sin x$ 恒成立等价于 $g(x)\geqslant g(0)=0$ 恒成立．

由于 $g'(x)=f'(x)-\cos x=2e^x+\dfrac{a}{x+1}-\cos x$，$x\in[0,\pi]$，所以

（i）当 $a\geqslant 0$ 时，$g'(x)\geqslant 2e^x-1>0$，函数 $y=g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 单调递增，所以 $g(x)\geqslant g(0)=0$ 在区间 $[0,\pi]$ 恒成立，符合题意．　　（7 分）

（ii）当 $a<0$ 时，$g'(x)=2e^x+\dfrac{a}{x+1}-\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 单调递增，$g'(0)=2+a-1=1+a$．

①当 $1+a\geqslant 0$ 即 $-1\leqslant a<0$ 时，$g'(x)\geqslant g'(0)=1+a\geqslant 0$，函数 $y=g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 单调递增，所以 $g(x)\geqslant g(0)=0$ 在 $[0,\pi]$ 恒成立，符合题意．

②当 $1+a<0$ 即 $a<-1$ 时，$g'(0)=1+a<0$，$g'(\pi)=2e^\pi+\dfrac{a}{\pi+1}+1$，

若 $g'(\pi)\leqslant 0$，即 $a\leqslant-(\pi+1)(2e^\pi+1)$ 时，$g'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 恒小于 0，则 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 单调递减，$g(x)<g(0)=0$，不符合题意．

若 $g'(\pi)>0$，即 $-(\pi+1)(2e^{\pi}+1)<a<-1$ 时，存在 $x_0\in(0,\pi)$ 使得 $g'(x_0)=0$．所以当 $x\in(0,\ x_0)$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递减，$g(x)<g(0)=0$，不符合题意.

综上所述，a 的取值范围是 $[-1,+\infty)$．　　（12 分）

22．解：

（1）$C_1:\sqrt{3}x+y-1=0$，$C_2:3x+3y-4\sqrt{2}=0$．　　（4 分）

（2）当 $k=2$ 时，C_2 的直角坐标方程为 $4x^2+y^2=4$，将 C_1 的参数方程代入其中，

整理得：$7t^2+4\sqrt{3}t-12=0$，$\Delta>0$，设 A,B 对应的参数分别为 t_1,t_2，

$t_1+t_2=-\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$，$t_1\cdot t_2=-\dfrac{12}{7}$，　　（7 分）

所以 $\dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}=\dfrac{1}{|t_1|}+\dfrac{1}{|t_2|}=\dfrac{|t_1|+|t_2|}{|t_1\cdot t_2|}=\dfrac{|t_1-t_2|}{\frac{12}{7}}$，

$$=\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1\cdot t_2}}{\frac{12}{7}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$　　（10 分）

23．解：

（1）当 $x\geqslant 2$ 时，$f(x)=x-2+x+1=2x-1>x+2$，解得 $x>3$，所以 $x>3$；

当 $-1<x<2$ 时，$f(x)=2-x+x+1=3>x+2$，解得 $x<1$，所以 $-1<x<1$；

当 $x\leqslant -1$ 时，$f(x)=2-x-x-1=1-2x>x+2$，解得 $x<-\dfrac{1}{3}$，所以 $x\leqslant -1$.

综上，$x<1$ 或 $x>3$，故不等式的解集是 $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$．　　（4 分）

（2）因为 $|x-2|+|x+1|\geqslant|x-2-(x+1)|=3$，当且仅当 $(x-2)(x+1)\leqslant 0$ 时等号成立，

所以 $m=3$．　　（6 分）

故 $a^3+b^3+c^3=\dfrac{(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)}{3}=\dfrac{[(a^{\frac{3}{2}})^2+(b^{\frac{3}{2}})^2+(c^{\frac{3}{2}})^2][(a^{\frac{1}{2}})^2+(b^{\frac{1}{2}})^2+(c^{\frac{1}{2}})^2]}{3}$

$$\geqslant\frac{(a^{\frac{3}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{3}{2}}\cdot c^{\frac{1}{2}})^2}{3}=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3},$$

当且仅当 $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{c^{\frac{3}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}}$，即 $a=b=c$ 时等号成立，

所以$\sqrt{\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}} \geqslant \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$.　　　（10 分）

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 “ 专业、专注、有态度 ” 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。