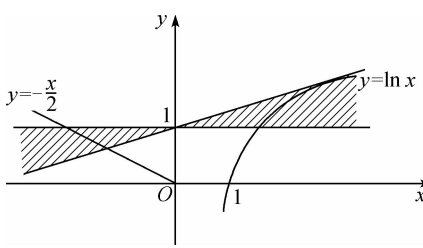


北海市 2021 年春季学期期末教学质量检测 · 高二数学(文科)

参考答案、提示及评分细则

1. D 由 $A = \{x | -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$, 所以 $A \cap B = \{x | 0 < x < \sqrt{2}\}$. 故选 D.
2. B $\frac{(1-i)^2}{1+i} = \frac{-2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -i(1-i) = -1-i$. 故选 B.
3. D 由于回归直线必经过点 $(\bar{x}, \bar{y})$, 而 $\bar{x} = 2.5, \bar{y} = 3.5, \therefore 3.5 = \hat{b} \times 2.5 + 5.25, \therefore \hat{b} = -0.7$. 故选 D.
4. C $a = \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{6} > \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5} = 1, b = \log_{\frac{1}{3}} \frac{\pi}{3} < \log_{\frac{1}{3}} 1 = 0, c = 3^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, 则 $0 < c < 1$, 所以 $b < c < a$.
5. A “三角形最多有一个内角是钝角”包括“三角形没有一个内角是钝角”和“三角形有一个内角是钝角”两种情况, 它的反面是“三角形有两个内角是钝角”和“三角形有三个内角是钝角”, 即“三角形最少有两个内角是钝角”, 故选 A.
6. D 将 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 代入 $\rho^2 \cos \theta = 1$ 得 $\rho^2 = 2$, 则 $|OA| = \rho = \sqrt{2}$.
7. B $s = 0, k = 2; s = 0 + 2 \times 2 = 4, k = 4; s = 4 + 2 \times 4 = 12, k = 6; s = 12 + 2 \times 6 = 24, k = 8; s = 24 + 2 \times 8 = 40, k = 10$, 此时刚好不满足条件“ $s < 38$ ”, 循环结束, 输出 k 的值为 10. 故选 B.
8. A 由 $f(-x) = (-x)^2 \sin(-x) = -x^2 \sin x = -f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为奇函数, 排除 C, D 选项; 又当 $0 < x < \pi$ 时, $\sin x > 0$, 可得 $f(x) > 0$. 故选 A.
9. D 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $1 \leq x+1 \leq 2$, 所以 $0 \leq \log_2(x+1) \leq 1$; 当 $-1 \leq x < 0$ 时, $-2 \leq 2x < 0$, 所以函数的值域是 $[-2, 1]$. 故选 D.
10. C 假设甲去过高风险地区, 则四人说的都是假话, 与题意不符; 假设乙去过高风险地区, 则甲、乙、丁说的都是真话, 与题意不符; 假设丙去过高风险地区, 则甲、丙说的是真话, 乙、丁说的是假话, 符合题意; 假设丁去过高风险地区, 则甲、丙、丁说的都是假话, 与题意不符. 故选 C.
11. B 由题意, 函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore \begin{cases} a > 1, \\ 2-a > 0, \\ (2-a) \times 1 - \frac{a}{2} \leq 0 \end{cases}$ 解得 $\frac{4}{3} \leq a < 2$, 即 $a \in [\frac{4}{3}, 2)$. 故选 B.
12. A 如图, 作出函数 $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & x < 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$ 的图象, 函数 $g(x) = f(x) - kx - 1$ 有且只有三个零点, 则函数 $f(x)$ 与函数 $y = kx + 1$ 的图象有且只有三个交点, 函数 $y = kx + 1$ 图象恒过点 $(0, 1)$, 则直线 $y = kx + 1$ 在图中阴影部分内时(不含边界), 函数 $f(x)$ 与 $y = kx + 1$ 有三个交点. 当直线 $y = kx + 1$ 与 $y = \ln x$ 的图象相切时, 设切点为 $(x_0, \ln x_0)$, 切线斜率为 $k = \frac{1}{x_0}$, $\therefore \ln x_0 = \frac{1}{x_0} \cdot x_0 + 1$, 解得 $x_0 = e^2, \therefore k = \frac{1}{e^2}, \therefore k \in (0, \frac{1}{e^2})$.
- 
13. 1 因为 $z(2+i) = 2-i$, 所以 $z(2+i)(2-i) = (2-i)(2-i)$, 所以 $5z = 3-4i$, 即 $z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$, 所以 $|z| = 1$.

14. 4 偶函数 $f(x)$ 的定义域为 $[2a-10, 3a]$, 则 $2a-10+3a=0$, 解得 $a=2$, 所以 $f(x)=x^2+2bx-5$, 满足 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 所以对称轴 $x=-b=0$, 解得 $b=0$, 则 $a^{a+b}=2^{2+0}=4$.

15. 1 C: $\begin{cases} x=1+2\cos \theta, \\ y=3+2\sin \theta \end{cases}$ 消去 θ , 可得圆的方程为 $(x-1)^2+(y-3)^2=4$, 因为圆心到直线 l 的距离 $d=3$, 所以 $|PQ|_{\min}=3-2=1$.

16. $\frac{11}{12}$ 记这名学生在第一个路口遇到红灯为事件 A , 在第二个路口遇到红灯为事件 B , 在第三个路口遇到红灯为事件 C . 这名学生在三个路口都没遇到红灯的概率为 $P(\overline{ABC})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=(1-\frac{1}{3})(1-\frac{3}{4})(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{12}$, 所以这名同学在上学路上至少遇到 1 个红灯的概率 $P=1-P(\overline{ABC})=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$.

17. 解: (1) 因为 $z=(m+2)(m+3)+(m+2)i$ 是纯虚数, 所以 $\begin{cases} (m+2)(m+3)=0, \\ m+2\neq 0, \end{cases}$ 解得 $m=-3$ 3 分
所以 $z=-i$, 则 $\overline{z}=i$ 5 分
(2) 由 $m=-1$, 得 $z=2+i$, 6 分
代入 $z\cdot i=a+bi$, 得 $(2+i)i=-1+2i=a+bi$, 8 分
即 $a=-1, b=2$ 10 分

18. 解: (1)

	男性观众	女性观众	合计
流泪	20	60	80
没有流泪	15	5	20
合计	35	65	100

..... 2 分

$K^2=\frac{100\times(20\times5-15\times60)^2}{35\times65\times80\times20}\approx17.582>10.828$ 5 分
所以有 99.9% 的把握认为观众在观看影片的过程中流泪与性别有关. 6 分
(2) 以分层抽样的方式, 从流泪与没有流泪的观众中抽取 5 人, 则流泪的观众抽到 $80\times\frac{5}{100}=4$ 人, 记为 a, b, c, d , 没有流泪的观众抽到 $20\times\frac{5}{100}=1$ 人, 记为 A 7 分
从这 5 人中抽 2 人有 10 种情况, 分别是 $ab, ac, ad, aA, bc, bd, bA, cd, cA, dA$ 9 分
其中这 2 人都流泪有 6 种情况, 分别是 ab, ac, ad, bc, bd, cd 11 分
所以所求概率 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ 12 分

19. 解: (1) 由 $\begin{cases} x=2\cos \alpha, \\ y=\sqrt{3}\sin \alpha, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \frac{x}{2}=\cos \alpha, \\ \frac{y}{\sqrt{3}}=\sin \alpha, \end{cases}$ 所以 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, 即曲线 C 的普通方程是 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 3 分

由 $\rho \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$, 得 $\rho \cos \theta - \rho \sin \theta + 1 = 0$, 又 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$,

所以 $x - y + 1 = 0$, 即直线 l 的直角坐标方程为 $x - y + 1 = 0$ 6 分

(2) 因为直线 l 经过点 $P(-1, 0)$, 且倾斜角是 45° ,

所以直线 l 的参数方程是 $\begin{cases} x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 是参数}).$ 8 分

设 A, B 对应的参数分别为 t_1, t_2 ,

将直线 l 的参数方程代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 整理得 $7t^2 - 6\sqrt{2}t - 18 = 0$, 10 分

所以 $\Delta = (6\sqrt{2})^2 - 4 \times 7 \times (-18) > 0, t_1 t_2 = -\frac{18}{7}$.

所以 $|PA| \cdot |PB| = |t_1 t_2| = \frac{18}{7}$ 12 分

20. 解: (1) $\bar{x} = \frac{5+10+15+20+25}{5} = 15$ 1 分

$\bar{y} = \frac{98+193+280+369+460}{5} = 280$ 2 分

$\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 5 \times 98 + 10 \times 193 + 15 \times 280 + 20 \times 369 + 25 \times 460 = 25\,500$ 3 分

$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 5^2 + 10^2 + 15^2 + 20^2 + 25^2 = 1\,375$ 4 分

所以 $b = \frac{25\,500 - 5 \times 15 \times 280}{1\,375 - 5 \times 15^2} = \frac{4\,500}{250} = 18$ 6 分

$\hat{a} = \bar{y} - b\bar{x} = 280 - 18 \times 15 = 10$ 7 分

所以点击量 y 与发布时间 x 之间的回归直线方程为 $\hat{y} = 18x + 10$ 8 分

(2) 令 $x = 60$, 得 $\hat{y} = 18 \times 60 + 10 = 1\,090 > 1\,000$ 10 分

所以 1 小时后, 该公众号信息的点击量约为 1 090 次, 达到了宣传效果. 12 分

21. 解: (1) 令 $n = 1$ 得, $a_2 = 3a_1 + 2 = 8$ 1 分

令 $n = 2$ 得, $a_3 = 3a_2 + 2 = 26$ 2 分

令 $n = 3$ 得, $a_4 = 3a_3 + 2 = 80$ 3 分

(2) 由于 $a_1 = 3^1 - 1, a_2 = 3^2 - 1, a_3 = 3^3 - 1, a_4 = 3^4 - 1, \dots$,
故猜想 $a_n = 3^n - 1$. 理由如下: 4 分

因为 $a_{n+1} = 3a_n + 2$, 所以 $a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$, 所以 $\frac{a_{n+1} + 1}{a_n + 1} = 3$ 5 分

又因为 $a_1 + 1 = 3$, 所以数列 $\{a_n + 1\}$ 是以 3 为首项, 3 为公比的等比数列. 7 分

所以 $a_n + 1 = 3^n, a_n = 3^n - 1$ 9 分

(3) $S_n = \frac{3(1-3^n)}{1-3} - n = \frac{3^{n+1}}{2} - n - \frac{3}{2}$ 12 分

22. 解: (1) $\because f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, $\therefore f(0) = \frac{b-1}{a+1} = 0, \therefore b=1$ 2 分

$\therefore f(x) = \frac{1-2^x}{a+2^x}, f(-x) = \frac{1-2^{-x}}{a+2^{-x}} = \frac{2^x-1}{a \cdot 2^x+1}$, 3 分

$\therefore \frac{2^x-1}{a \cdot 2^x+1} = -\frac{1-2^x}{a+2^x}$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都成立, $(2^x-1)^2(a-1)=0$ 对一切实数 x 都成立, 5 分

$\therefore a=1$ 6 分

(2) 由(1)知, $f(x) = \frac{1-2^x}{1+2^x} = \frac{2}{1+2^x} - 1$.

分析知, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数. 8 分

又 $\because$ 对任意 $t \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(t-2t^2) + f(-k) > 0$ 恒成立, $\therefore f(t-2t^2) > f(k)$ 对任意 $t \in \mathbf{R}$ 成立, 9 分

$\therefore t-2t^2 < k$ 对任意 $t \in \mathbf{R}$ 成立. 10 分

又当 $t \in \mathbf{R}$ 时, $(t-2t^2)_{\max} = \frac{1}{8}, \therefore k > \frac{1}{8}$. 故所求实数 k 的取值范围是 $(\frac{1}{8}, +\infty)$ 12 分