准考证号＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 学校＿＿＿＿

绝密★启用并使用完毕前

2022 年 5 月济南市高考模拟考试

数学试题

本试卷共 4 页，22 题，全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.设集合 $A=\{x\in \mathbf{Z}|-1<x\leqslant 2\}$，$B=\{x||x|\leqslant 1\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|0<x\leqslant 1\}$　　B. $\{x|-1<x\leqslant 1\}$　　C. $\{1\}$　　D. $\{0,1\}$

2.复数 $z=2-i^3$（其中 i 为虚数单位）的共轭复数为

A.$2-i$　　B.$2+i$　　C.1　　D.3

3.已知单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A. $\frac{2\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

4."$0<a<\frac{1}{2}$"是"方程 $\frac{x^2}{2a-1}+\frac{y^2}{a}=1$ 表示的曲线为双曲线"的

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分又不必要条件

5."回文联"是对联中的一种，既可顺读，也可倒读.比如，一副描绘厦门鼓浪屿景色的回文联：雾锁山头山锁雾，天连水尾水连天.由此定义"回文数"，n 为自然数，且 n 的各位数字反向排列所得自然数 n' 与 n 相等，这样的 n 称为"回文数"，如：1221，2413142.则所有 5 位数中是"回文数"且各位数字不全相同的共有

A.648 个　　B.720 个　　C.810 个　　D.891 个

6.已知圆 $M:(x-a)^2+(y-1)^2=r^2(r>0)$，若圆 M 与 x 轴交于 A，B 两点，且 $\frac{|AB|}{|MB|}=\sqrt{3}$，则 $r=$

A.$2\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D.1

7.如图 1，洛书是一种关于天地空间变化脉络的图案，2014 年正式入选国家级非物质文化遗产名录，其数字结构是戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足，以五居中，形成图 2 中的九宫格.将自然数 $1,2,3,\cdots,n^2$ 放置在 n 行 n 列 $(n\geqslant 3)$ 的正方形图表中，使其每行、每列、每条对角线上的数字之和（简称"幻和"）均相等，具有这种性质的图表称为"n 阶幻方".洛书就是一个 3 阶幻方，其"幻和"为 15.则 7 阶幻方的"幻和"为

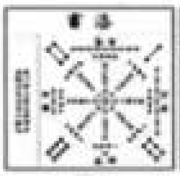


图1

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图2

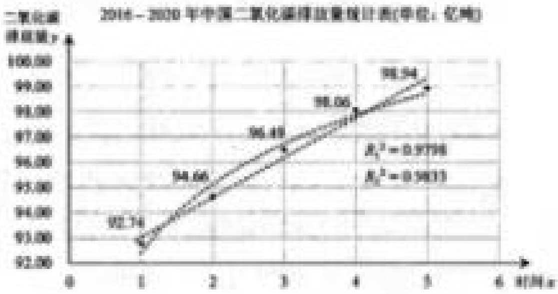
A.91　　B.169　　C.175　　D.180

8.已知函数 $f(x)=\sin x+\sin 2x$ 在 $(0,a)$ 上有 4 个零点，则实数 a 的最大值为

A. $\frac{4}{3}\pi$　　B. 2π　　C. $\frac{8}{3}\pi$　　D. 3π

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9.进入 21 世纪以来，全球二氧化碳排放量增长迅速，自 2000 年至今，全球二氧化碳排放量增加了约 40%，我国作为发展中国家，经济发展仍需要大量的煤炭能源消耗.下图是 2016—2020 年中国二氧化碳排放量的统计图表（以 2016 年为第 1 年）.



利用图表中数据计算可得，采用某非线性回归模型拟合时，$R_1^2=0.979\ 8$；采用一元线性回归模型拟合时，线性回归方程为 $\hat{y}=1.58x+91.44$，$R_2^2=0.983\ 3$.则下列说法正确的是

A.由图表可知，二氧化碳排放量 y 与时间 x 正相关

B.由决定系数可以看出，线性回归模型的拟合程度更好

C.利用线性回归方程计算 2019 年所对应的样本点的残差为 -0.30

D.利用线性回归方程预计 2025 年中国二氧化碳排放量为 107.24 亿吨

10.将函数 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 图象上所有的点向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则下列说法正确的是

A. $g(x)$ 的最小正周期为 π

B. $g(x)$ 图象的一个对称中心为 $\left(\frac{7}{12}\pi,0\right)$

C. $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

D. $g(x)$ 的图象与函数 $y=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象重合

11.已知函数 $f(x)=\ln(\sqrt{4x^2+1}+2x)+x^3$，$g(x)=f(x+1)$.若实数 a,b(a,b 均大于 1) 满足 $g(3b-2a)+g(-2-a)>0$,则下列说法正确的是

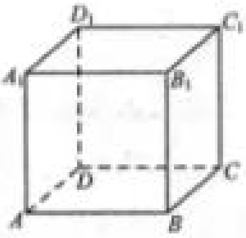
A.函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增

B.函数 $g(x)$ 的图象关于 $(1,0)$ 中心对称

C. $e^{b-a}>\dfrac{b}{a}$

D. $\log_a(a+1)>\log_b(b+1)$

12.如图,已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 顶点处有一质点 Q ,点 Q 每次会随机地沿一条棱向相邻的某个顶点移动,且向每个顶点移动的概率相同.从一个顶点沿一条棱移动到相邻顶点称为移动一次.若质点 Q 的初始位置位于点 A 处,记点 Q 移动 n 次后仍在底面 $ABCD$ 上的概率为 P_n ,则下列说法正确的是



A. $P_2=\dfrac{5}{9}$

B. $P_{n+1}=\dfrac{2}{3}P_n+\dfrac{1}{3}$

C.点 Q 移动 4 次后恰好位于点 C_1 的概率为 0

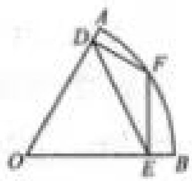
D.点 Q 移动 10 次后恰好回到点 A 的概率为 $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3^9}+1\right)$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13.已知正实数 a,b 满足 $ab=4$,则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{9}{b}$ 的最小值为________.

14.已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$,若过点 $(1,2)$ 的直线 l 与抛物线恒有公共点,则 p 的值可以是________.(写出一个符合题意的答案即可)

15.2022 年 3 月,中共中央办公厅、国务院办公厅印发了《关于构建更高水平的全民健身公共服务体系的意见》,再次强调持续推进体育公园建设.如图,某市拟建造一个扇形体育公园,其中 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$,$OA=OB=2$ 千米.现需要在 OA,OB,$\overset{\frown}{AB}$ 上分别取一点 D,E,F ,建造三条健走长廊 DE,DF,EF ,若 $DF\perp OA$,$EF\perp OB$,则 $DE+EF+FD$ 的最大值为________千米.



16.在四面体 $ABCD$ 中,已知 $AB=CD=AC=BD=2\sqrt{5}$,$AD=BC=4$,记四面体 $ABCD$ 外接球的球心到平面 ABC 的距离为 d_1,四面体 $ABCD$ 内切球的球心到点 A 的距离为 d_2,则 $\dfrac{d_1}{d_2}$ 的值为________.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(10 分)

已知 $\triangle ABC$ 内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c ,满足 $4a\sin B=3b\cos A$.

(1)求 $\cos A$ 的值;

(2)若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{a^2-c^2}{2}$,求 $\dfrac{b}{c}$ 的值.

18.(12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}=1(n\in N_+,n\geqslant 2)$，$a_2=4$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)记数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，求证：$S_n<2$.

19.(12分)

如图1，正方形 $ABCD$ 中，E,F 分别为边 BC,AD 的中点，将四边形 $EFDC$ 沿直线 EF 折起，使得平面 $CDFE\perp$ 平面 $ABEF$.如图2，点 M,N 分别满足 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{FN}=\overrightarrow{NE}$.

(1)求证：$AN\perp$ 平面 BMN；

(2)求平面 AFM 与平面 BMN 夹角的余弦值.

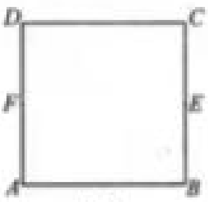


图1

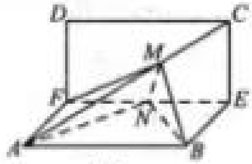


图2

20.(12分)

数据显示，中国直播购物规模近几年保持高速增长态势，而直播购物中的商品质量问题逐渐成为人们关注的重点.已知某顾客在直播电商处购买了 n $(n\in N_+)$ 件商品.

(1)若 $n=10$，且买到的商品中恰好有2件不合格品，该顾客等可能地依次对商品进行检查.求顾客检查的前4件商品中不合格品件数 X 的分布列.

(2)抽检中发现直播电商产品不合格率为0.2.若顾客购买的 n 件商品中，至少有两件合格产品的概率不小于0.998 4，求 n 的最小值.

21.(12分)

已知椭圆 $C:\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，且经过点 $P(1,\sqrt{3})$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2) A,B 为椭圆 C 上两点，直线 PA 与 PB 倾斜角互补，求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

22.(12分)

已知函数 $f(x)=\ln|x|+a\cos x+bx$，其中 $a\geqslant 0,b\in \mathbf{R}$.

(1)当 $a=0$ 时，若 $f(x)$ 存在大于零的极值点，求 b 的取值范围；

(2)若存在 $x_1,x_2\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ (其中 $x_1\neq x_2$)，使得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 与点 $(x_2,f(x_2))$ 处有相同的切线，求 a 的取值范围.

2022年5月高三模拟考试

数学试题参考答案

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	A	C	D	B	C	C

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

题号	9	10	11	12
答案	ABD	ABC	AD	ACD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．3；14．$p\ge 2$（不小于2的实数均正确）；15．$2+\sqrt{3}$；16．$\frac{\sqrt{21}}{14}$．

四、解答题：共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．【解析】

（1）因为 $4a\sin B=3b\cos A$，

由正弦定理得：$4\sin A\sin B=3\sin B\cos A$，

因为 $\sin B>0$，所以 $4\sin A=3\cos A$，

又因为 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$，$A\in(0,\pi)$，

所以 $\cos A=\frac{4}{5}$．

（2）由（1）及余弦定理知 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{4}{5}$，

整理得：$5b^2+5c^2-5a^2=8bc$ ①，

由面积公式：$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{a^2-c^2}{2}$，

整理得：$5a^2-5c^2=3bc$ ②，

①②相加得：$5b^2=11bc$，所以 $\frac{b}{c}=\frac{11}{5}$．

18．【解析】

（1）因为 $a_2=4$，所以 $\sqrt{a_2}=2$；

又因为 $\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}=1(n\geqslant 2)$，则 $\sqrt{a_1}=1$，

所以 $\{\sqrt{a_n}\}$ 是首项为 1 公差为 1 的等差数列，

所以 $\sqrt{a_n}=n$，则 $a_n=n^2$．

（2）因为 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{n^2}=\frac{4}{4n^2}<\frac{4}{4n^2-1}=\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}=2(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，

所以 $S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$

$<2[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]$

$=2-\frac{2}{2n+1}<2$，得证．

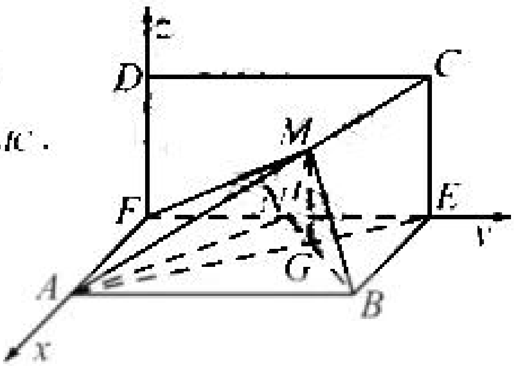
19.【解析】

（1）连结 AE 交 BN 于点 G，连结 MG，设 $AB=2$，

因为 平面 $CDFE\perp$ 平面 $ABEF$，

平面 $CDFE\cap$ 平面 $ABEF=EF$，　$CE\subset$ 平面 $CDFE$，　$CE\perp EF$，

所以 $CE\perp$ 平面 $ABEF$．



因为 点 N 是 EF 的中点，$NE\ /\!/\ AB$，

所以 $AG=2GE$，　又因为 $AM=2MC$，

所以 $MG\ /\!/\ CE$，

所以 $MG\perp$ 平面 $ABEF$，

因为 $AN\subset$ 平面 $ABEF$，

所以 $MG\perp AN$，又 $AB=2$，$AN=NB=\sqrt{2}$，所以 $AN\perp NB$，

因为 $NB\cap MG=G$，$NB,MG\subset$ 平面 BMN，

所以 $AN\perp$ 平面 BMN．

（2）如图，分别以 FA，FE，FD 所在直线为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，

所以 $F(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$M(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3})$，

所以 $\overrightarrow{FA}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{FM}=(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3})$，

设平面 AFM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FA}=0 \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FM}=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=0 \\ 2y+z=0 \end{cases}$，

令 $y=1$，得 $\boldsymbol{n}=(0,1,-2)$，

由（1）知 平面 BMN 的法向量为 $\overrightarrow{AN}=(-1,1,0)$，

设平面 AFM 与平面 BMN 的夹角为 θ，

所以 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AN}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AN}|}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

所以 平面 AFM 与平面 BMN 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$．

20.【解析】

（1）由题意可知，X 的取值为 0，1，2．

$P(X=0)=\dfrac{C_2^0C_8^4}{C_{10}^4}=\dfrac{1}{3}$，

$P(X=1)=\dfrac{C_2^1C_8^3}{C_{10}^4}=\dfrac{8}{15}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_2^2C_8^2}{C_{10}^4}=\dfrac{2}{15}$．

所以 顾客检查的前 4 件商品中不合格品件数 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

（2）记“顾客购买的 n 件商品中，至少有两件合格产品”为事件 A，

则 $P(A)=1-0.2^n-C_n^1\times0.2^{n-1}\times0.8=1-(1+4n)\cdot0.2^n$，

由题意可知 $1-(1+4n)\cdot0.2^n\geqslant0.9984$，

所以 $(1+4n)\cdot0.2^n\leqslant0.0016$，即 $(1+4n)\cdot0.2^{n-4}\leqslant1$，

设 $f(n)=(1+4n)\cdot0.2^{n-4}$，

则 $f(n+1)-f(n)=(5+4n)\cdot0.2^{n-3}-(1+4n)\cdot0.2^{n-4}=-16n\cdot0.2^{n-3}<0$，

所以 $f(n+1)<f(n)$，

因为 $f(5)=21\times 0.2=4.2>1$，$f(6)=25\times 0.04=1$，

所以 当$n\geqslant 6$时，$f(n)\leqslant 1$成立，

所以 n的最小值为6.

21.【解析】

（1）由题意得：$\begin{cases} e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3} \\ \dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1 \end{cases}$，解得：$a=\sqrt{6}$，$b=\sqrt{2}$，

所以 $\dfrac{y^2}{6}+\dfrac{x^2}{2}=1$.

（2）由题意可知 直线AB的斜率一定存在，

设直线AB的方程为$y=kx+t$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

将$y=kx+t$代入$\dfrac{y^2}{6}+\dfrac{x^2}{2}=1$得：

$(k^2+3)x^2+2ktx+t^2-6=0$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{-2kt}{k^2+3}$，$x_1x_2=\dfrac{t^2-6}{k^2+3}$，

因为 直线PA和直线PB的倾斜角互补，

所以 $\dfrac{y_1-\sqrt{3}}{x_1-1}=-\dfrac{y_2-\sqrt{3}}{x_2-1}$，

化简可得：$2\sqrt{3}+x_1y_2+x_2y_1=(y_1+y_2)+\sqrt{3}(x_1+x_2)$，

即 $(k-\sqrt{3})(k+t-\sqrt{3})=0$，

因为 直线AB不过点P，所以 $k=\sqrt{3}$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{-\sqrt{3}t}{3}$，$x_1x_2=\dfrac{t^2-6}{6}$，

则 $|AB|=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{12-t^2}}{3}$，

又 点 P 到直线 AB 的距离为 $\dfrac{|t|}{2}$，

因为 $\Delta=12t^2-24\left(t^2-6\right)>0$，所以 $-2\sqrt{3}<t<2\sqrt{3}$，

所以 $S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{12-t^2}}{3}\cdot\dfrac{|t|}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{\left(12-t^2\right)t^2}\leqslant\sqrt{3}$，

当且仅当 $t=\pm\sqrt{6}$ 时等号成立，

所以 $\triangle PAB$ 面积最大值为 $\sqrt{3}$．

22．【解析】

（1）由题意知 $f(x)=\ln|x|+bx$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}+b=\dfrac{x+b}{x}$．

①若 $b\geqslant 0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，无极值点；

②若 $b<0$，当 $x\in(0,-b)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(-b,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一一个极小值点，

故 b 的取值范围是 $(-\infty,0)$．

（2）由题意，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a\sin x+b$，

$f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线方程为 $y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$，

即 $y=f'(x_1)x-x_1f'(x_1)+f(x_1)$，

同理 $f(x)$ 在点 $(x_2,f(x_2))$ 处的切线方程为 $y=f'(x_2)x-x_2f'(x_2)+f(x_2)$，

因为两切线相同，

所以 $\begin{cases}f'(x_1)=f'(x_2)\\ f(x_1)-x_1f'(x_1)=f(x_2)-x_2f'(x_2)\end{cases}$，

化简得 $\begin{cases}\dfrac{1}{x_1}-a\sin x_1=\dfrac{1}{x_2}-a\sin x_2\\ ax_1\sin x_1+\ln|x_1|+a\cos x_1=ax_2\sin x_2+\ln|x_2|+a\cos x_2\end{cases}$，

令 $h(x)=ax\sin x+\ln|x|+a\cos x$，$h'(x)=ax\cos x+\frac{1}{x}$，

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；

当 $x\in[-\frac{\pi}{2},0)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减．

注意到 $h(x)$ 为偶函数，且 $x_1\neq x_2$，$h(x_1)=h(x_2)$，故 $x_1+x_2=0$，

令 $g(x)=\frac{1}{x}-a\sin x$，注意到 $g(x)$ 为奇函数，

所以 当 $x_1+x_2=0$ 时，$g(x_1)+g(x_2)=0$，

又因为 $g(x_1)=g(x_2)$，故 $g(x_1)=g(x_2)=0$，

因为 $a>0$，$x\in[-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2}]$．

所以 当 $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$g(x)$ 单调递减，$g(x)\in[\frac{2}{\pi}-a,+\infty)$，

当 $x\in[-\frac{\pi}{2},0)$ 时，$g(x)$ 单调递减，$g(x)\in(-\infty,-\frac{2}{\pi}+a]$，

故 $\begin{cases}\frac{2}{\pi}-a\leq 0\\ a-\frac{2}{\pi}\geq 0\end{cases}$，所以 $a\geq\frac{2}{\pi}$．

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。