保密★启用前

广东省2022届高三综合能力测试（三）

数学试题

2022年5月

注意事项:

1. 答卷前，考生务必要填涂答题卷上的有关项目.
2. 选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答案涂在答题卷相应的位置上.
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卷各题目指定区域内；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液，不按以上要求作答的答案无效.
4. 请考生保持答题卷的整洁，考试结束后，将答题卷交回.

一、选择题: 本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $A=$ [illegible]，$B=\{x|\ln x<0\}$，则（　　）

A．$A\cup B=$ [illegible]　　B．$A\cap B=\varnothing$　　C．$A\subseteq B$　　D．$B\subseteq A$

2．设复数 z 满足 $iz=1+i$，则 $|z^2-z\bar{z}|=$（　　）

A．0　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．$2\sqrt{2}$

3．已知直线 $l:y=kx+1$ 与圆 $O:x^2+y^2=4$ 相交于 A,B 两点，则“$k=0$”是“$|AB|=2\sqrt{3}$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．古希腊数学家帕普斯提出著名的蜂窝猜想，认为蜂窝的优美形状，是自然界最有效劳动的代表.他在《汇编》一书中对蜂房的结构作出精彩的描写“蜂房是由许许多多的正六棱柱组成，一个挨着一个，紧密地排列，没有一点空隙.蜜蜂凭着自己本能的智慧选择了正六边形，因为使用同样多的原材料，正六边形具有最大的面积，从而可贮藏更多的蜂蜜.”某兴趣小组以蜂窝为创意来源，制作了几个棱长均相等的正六棱柱模型，设该正六棱柱的体积为 V_1，其外接球的体积为 V_2，则 $\dfrac{V_1}{V_2}=$（　　）

A．$\dfrac{3}{\pi}$　　B．$\dfrac{9\sqrt{3}}{16\pi}$　　C．$\dfrac{9\sqrt{15}}{25\pi}$　　D．$\dfrac{9\sqrt{3}}{64\pi}$

5．已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$，$F_1,F_2$ 分别是双曲线的左、右焦点，M 是双曲线右支上一点，连接 MF_1 交双曲线 C 左支于点 N，若 ΔMNF_2 是以 F_2 为直角顶点的等腰直角三角形，则双曲线的离心率为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$\sqrt{5}$

6．将5名核酸检测工作志愿者分配到防疫测温、信息登记、维持秩序、现场指引4个岗位，每名志愿者只分配1个岗位，每个岗位至少分配1名志愿者，则不同分配方案共有（　　）

A．120种　　B．240种　　C．360种　　D．480种

7．已知函数 $f(x)=3\cos\left(\omega x-\dfrac{2\pi}{3}\right)(\omega>0)$，且 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 有且仅有3个零点，则 ω 的取值范围是（　　）

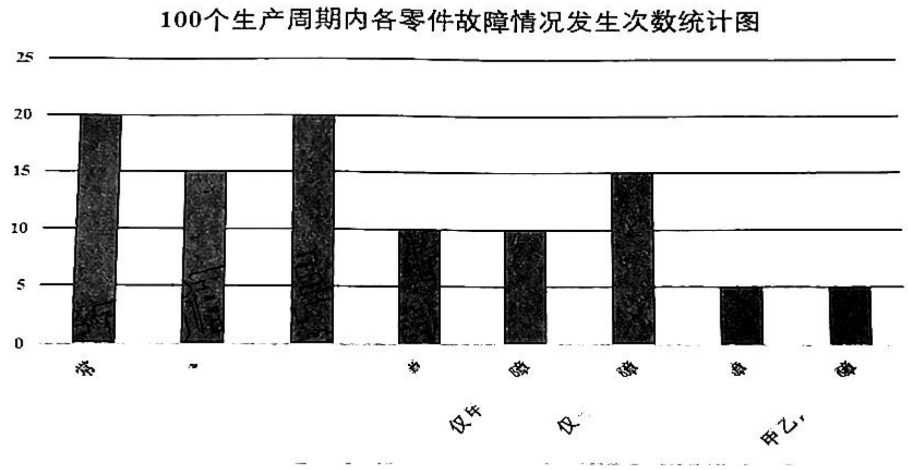
A. $\left[\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$　　B. $\left[\frac{5}{3},\frac{13}{6}\right)$　　C. $\left[\frac{7}{6},\frac{13}{6}\right)$　　D. $\left[\frac{13}{6},\frac{19}{6}\right)$

8. 在数学和许多分支中都能见到很多以瑞士数学家欧拉命名的常数、公式和定理，如：欧拉函数 $\varphi(n)$（$n\in N^*$）的函数值等于所有不超过正整数 n 且与 n 互素的正整数的个数，（互素是指两个整数的公约数只有 1）．例如：$\varphi(1)=1$；$\varphi(3)=2$（与 3 互素有 1、2）；$\varphi(9)=6$（与 9 互素有 1、2、4、5、7、8）．记 S_n 为数列 $\{n\cdot\varphi(3^n)\}$ 的前 n 项和，则 $S_{10}=$（　　）

A. $\frac{19}{2}\times3^{10}+\frac{1}{2}$　　B. $\frac{21}{2}\times3^{10}+\frac{1}{2}$　　C. $\frac{19}{4}\times3^{11}+\frac{3}{4}$　　D. $\frac{21}{4}\times3^{11}+\frac{1}{4}$

二、选择题：本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 一部机器有甲乙丙三个易损零件，在一个生产周期内，每个零件至多会故障一次．工程师统计了近100个生产周期内一部机器各类型故障发生的次数得到如下柱状图，由频率估计概率，在一个生产周期内，以下说法正确的是（　　）



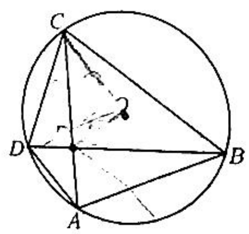
A. 至少有一个零件发生故障的概率为0.8

B. 有两个零件发生故障的概率比只有一个零件发生故障的概率更大

C. 乙零件发生故障的概率比甲零件发生故障的概率更大

D. 已知甲零件发生了故障，此时丙零件发生故障的概率比乙零件发生故障的概率更大

10. "圆幂定理"是平面几何中关于圆的一个重要定理，它包含三个结论，其中一个是相交弦定理：圆内的两条相交弦，被交点分成的两条线段长的积相等．如图，已知圆 O 的半径为2，点 P 是圆 O 内的定点，且 $OP=\sqrt{2}$，弦 AC、BD 均过点 P，则下列说法正确的是（　　）



A. $\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{DB}=0$

B. $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ 为定值

C. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ 的取值范围是 $[-2,0]$

D. 当 $AC\perp BD$ 时，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ 为定值

11. 已知 $a,b\in\mathbf{R}^*$，e 是自然对数的底，若 $b+e^b=a+\ln a$，则 $\frac{a}{b}$ 的取值可以是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

12. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=1$，点 P 满足 $\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CD}+\mu\overrightarrow{CC_1}$，其中 $\lambda\in[0,1]$，$\mu\in[0,1]$，则下列结论正确的是(　　)

A. 当 B_1P // 平面 A_1BD 时，B_1P 可能垂直 CD_1

B. 若 B_1P 与平面 CC_1D_1D 所成角为 $\frac{\pi}{4}$，则点 P 的轨迹长度为 $\frac{\pi}{2}$

C. 当 $\lambda=\mu$ 时，$|\overrightarrow{DP}|+|\overrightarrow{A_1P}|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2}$

D. 当 $\lambda=1$ 时，正方体经过点 A_1、P、C 的截面面积的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{2}\right]$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，其中第 16 题第一空 2 分，第二空 3 分.

13. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3=3$，$3a_{n+1}=a_n$，S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则 $S_4=$_______.

14. 已知 $\tan\alpha=2$，则 $\sin(2\alpha-\frac{\pi}{4})=$_______.

15. 已知椭圆 C 的中心为坐标原点，焦点在 y 轴上，F_1,F_2 为 C 的两个焦点，C 的短轴长为 4，且 C 上存在一点 P，使得 $|PF_1|=6|PF_2|$，写出椭圆 C 的一个标准方程_________.

16. 已知函数 $f(x)=1+2\log_2(1+x)\,(x\in(-1,+\infty))$.

(1) $\forall x\in(-1,+\infty), f(1+2x)-f(x)=$_______；

(2) 若 m,n 满足 $f(m-1)+f(n-2)=f(n)-1$，则 $m+n$ 的最小值是_______.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知 ΔABC 中，a,b,c 分别为内角 A,B,C 的对边，且 $2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\sin C$.

(1) 求角 A 的大小；

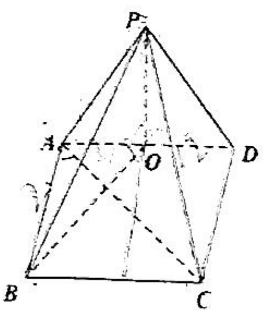
(2) 设点 D 为 BC 上一点，AD 是 ΔABC 的角平分线，且 $AD=2$，$b=3$，求 ΔABC 的面积.

18. (12 分)

如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为矩形，$AB=2$，$AD=2\sqrt{2}$，顶点 P 在底面 $ABCD$ 的正投影为 AD 的中点 O.

(1) 求证：平面 $PAC\perp$ 平面 POB；

(2) 若平面 PAB 与平面 PCD 的交线为 l，$PD=2$，求 l 与平面 PAC 所成角的大小.



19.（12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，$a_1=1$，$a_n>0$，$a_na_{n+1}=4S_n-1$．

(1) 计算a_2的值，求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设$b_n=(-1)^n a_na_{n+1}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n．

20.（12 分）

学习强国 APP 从 2021 年起，开设了一个“四人赛”的答题模块．规则如下：用户进入“四人赛”后，共需答题两局，每局开局时，系统会自动匹配 3 人与用户一起答题，每局答题结束时，根据答题情况四人分获第一、二、三、四名．首局中的第一名积 3 分，第二、三名均积 2 分，第四名积 1 分；第二局中的第一名积 2 分，其余名次均积 1 分．两局的得分之和为用户在“四人赛”中的总得分．

假设用户在首局获得第一、二、三、四名的可能性相同；若首局获第一名，则第二局获第一名的概率为$\frac{1}{5}$，若首局没获第一名，则第二局获第一名的概率为$\frac{1}{3}$．

(1) 设用户首局的得分为X，求X的分布列；

(2) 求用户在“四人赛”中的总得分的期望值．

21.（12 分）

已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，且经过点$(-1,\frac{3}{2})$．

(1) 求椭圆E的标准方程；

(2) 设椭圆E的右顶点为A，点O为坐标原点，点B为椭圆E上异于左、右顶点的动点，直线$l:x=t\ (t>a)$交x轴于点P，直线PB交椭圆E于另一点C，直线BA和CA分别交直线l于点M和N，若O、A、M、N四点共圆，求t的值．

22.（12 分）

设函数$f(x)=x^2-ax+2\sin x$．

(1) 若$a=1$，求曲线$y=f(x)$的斜率为1的切线方程；

(2) 若$f(x)$在区间$(0,2\pi)$上有唯一零点，求实数a的取值范围．

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。