

2022 年中国数学奥林匹克希望联盟夏令营试题（三）

考试时间：2022 年 7 月 30 日上午 8:00 — 9:20

一、填空题（本大题共 8 道小题，每小题 8 分，共 64 分）

1. 计算： $\sin(\arcsin(0.7) + \arcsin(0.3)) \cdot \cos\left(\arcsin(0.3) - \arcsin(0.7) - \frac{\pi}{2}\right) =$ _____.
2. 设集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$, $X = \{mn \mid z = a + bi, \text{ 其中 } a \in A, b \in B, z \text{ 为实系数方程 } x^2 + mx + n = 0 \text{ 的根}\}$, 则 X 中所有元素之和为_____.
3. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 其左、右焦点为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$. 实数 a, b, c 依次构成等比数列. 设 P 为椭圆 E 上任意一点, I 为 $\triangle PF_1F_2$ 的内心, y_P, y_I 分别为点 P, I 的纵坐标, 则 $\frac{y_P}{y_I} =$ _____.
4. 已知正四面体 $ABCD$ 的顶点 C 在平面 α 内, 顶点 B 在平面 α 内的正投影为 O , 直线 BC 与平面 α 所成的角为 60° . 当顶点 A 与点 O 的距离最大时, 直线 CD 与平面 α 所成角的正弦值为_____.
5. 已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\angle A = 90^\circ$, 边 BC 上一点 D 满足 $BD:DC = c:4b$, 若 $AD = 1$, 则 $b + c$ 的最小值为_____.
6. 已知数列 $\{a_n\}$ 共有 7 项, 且 $a_4^2 = a_1 a_7$, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 满足 $2S_n = a_n^2 + a_n (1 \leq n \leq 7)$, 则满足上述条件的数列 $\{a_n\}$ 共有_____个.
7. 已知 $r_1, r_2, \dots, r_n$ 为 n 次首一多项式 $P(x)$ 的所有实数根, 若 $\frac{P(i)}{i^n} = 2020 + 2022i$ (这里 i 为虚数单位), 则 $\arctan r_1 + \arctan r_2 + \dots + \arctan r_n =$ _____.
8. 将 6×6 的方格表中的 12 个小方格染成黑色, 使得每行和每列均恰有 2 个黑格, 则不同的染色方式共有_____种.

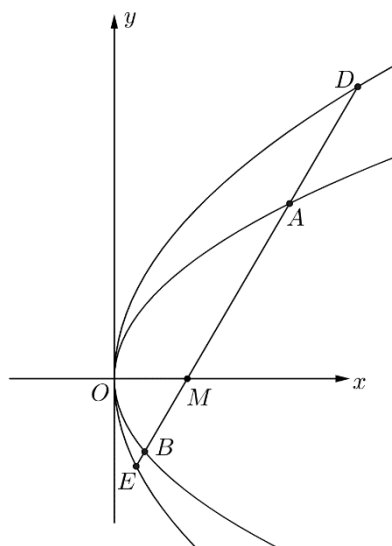
二、解答题（本大题共 3 道小题，第 9 题 16 分，第 10 题 20 分，第 11 题 20 分，共 56 分）

9. 已知集合 $D = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 = 2k\}$ ，其中 k 为正常数，若不等式 $(\frac{1}{x_1} - x_1)(\frac{1}{x_2} - x_2) \geq (k - \frac{1}{k})^2$ 对

任意 $(x_1, x_2) \in D$ 恒成立，试求 k 的取值范围.

10. 已知直线 l 分别与两抛物线 $C_1: y^2 = 2px (p > 0)$ 和 $C_2: y^2 = 4px$ 交于四个不同的点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$

$D(x_3, y_3), E(x_4, y_4)$ ，且 $y_4 < y_2 < y_1 < y_3$. 设 l 与 x 轴交于点 M ，若 $AD = 6BE$ ，求 $\frac{AM}{ME}$ 的值.



11. 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $a_1 = 2, b_1 = 0, a_2 = 2, b_2 = 2$ ，且对任意正整数 $n \geq 3$ ，有 $a_n = a_{n-1}a_{n-2} - b_{n-1}b_{n-2}$ ，

$b_n = a_{n-1}b_{n-2} + a_{n-2}b_{n-1}$ ，求 $|a_{2022}|$ 的末两位数字.

2022 年中国数学奥林匹克希望联盟夏令营试题（三）

考试时间：2022 年 7 月 30 日上午 8:00 — 9:20

一、填空题（本大题共 8 道小题，每小题 8 分，共 64 分）

1. 计算： $\sin(\arcsin(0.7) + \arcsin(0.3)) \cdot \cos\left(\arcsin(0.3) - \arcsin(0.7) - \frac{\pi}{2}\right) =$ _____.

【答案】 $-\frac{2}{5}$

【解析】

原式

$$\begin{aligned} &= \sin(\arcsin(0.7) + \arcsin(0.3)) \cdot \sin(\arcsin(0.3) - \arcsin(0.7)) \\ &= (\sin(\arcsin(0.3)))^2 - (\sin(\arcsin(0.7)))^2 \\ &= -0.4 \end{aligned}$$

2. 设集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$, $X = \{mn \mid z = a + bi, \text{ 其中 } a \in A, b \in B, z \text{ 为实系数方程 } x^2 + mx + n = 0 \text{ 的根}\}$, 则 X 中所有元素之和为_____

【答案】 -186

【解析】 z 与 $\bar{z}$ 为方程两根

由韦达定理, $m = -2a$, $n = a^2 + b^2$

$$\begin{aligned} \text{则 } X \text{ 中所有元素之和为 } & \sum_{a \in A, b \in B} [-2a(a^2 + b^2)] = -2 \sum_{a \in A, b \in B} (a^3 + ab^2) \\ &= -2 \left[2 \sum_{a \in A} a^3 + \left(\sum_{a \in A} a \right) \left(\sum_{b \in B} b^2 \right) \right] = -2(18 + 3 \times 25) = -186 \end{aligned}$$

3. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 其左、右焦点为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$. 实数 a, b, c 依次构成等比数列. 设 P

为椭圆 E 上任意一点, I 为 $\triangle PF_1F_2$ 的内心, y_P, y_I 分别为点 P, I 的纵坐标, 则 $\frac{y_P}{y_I} =$ _____.

【答案】 $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

【解析】 由题意, $b^2 = ac \Rightarrow a^2 - c^2 - ac = 0 \Rightarrow e^2 + e - 1 = 0$, 故 $e = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

设 PI 和 x 轴交于点 M , 则 $\frac{PI}{IM} = \frac{PF_1}{F_1M} = \frac{PF_2}{F_2M}$, 故

$$\frac{PI}{IM} = \frac{PF_1 + PF_2}{F_1M + F_2M} = \frac{2a}{2c} = \frac{1}{e} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\text{故 } \frac{|y_p|}{|y_l|} = \frac{PI}{IM} + 1 = \frac{\sqrt{5}+3}{2}.$$

4. 已知正四面体 $ABCD$ 的顶点 C 在平面 α 内, 顶点 B 在平面 α 内的正投影为 O , 直线 BC 与平面 α 所成的角为 60° . 当顶点 A 与点 O 的距离最大时, 直线 CD 与平面 α 所成角的正弦值为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【解析】 $\because$ 四边形 $OBAC$ 中, 顶点 A 与点 O 的距离最大, $\therefore O, B, A, C$ 四点共面, 设此平面为 β ,

$$\because BO \perp \alpha, BO \subseteq \beta, \therefore \beta \perp \alpha,$$

如图, 过点 D 作 $DH \perp$ 平面 ABC , 垂足为 H , 连接 HC , 设正四面体 $ABCD$ 的棱长为 1,

$$\text{则在 } Rt\triangle HCD \text{ 中, } CH = \frac{\sqrt{3}}{3} BC = \frac{\sqrt{3}}{3}. \because BO \perp \alpha, CH \parallel BO, \text{ 则}$$

$$CH \perp \alpha$$

过点 D 作 $DE \perp \alpha$ 于 E , 连接 CE , 则 $\angle DCE$ 就是直线 CD 与平面 α 所成的角,

$$\because DH \perp \beta, \alpha \perp \beta \text{ 且 } DH \not\subset \alpha, \therefore DH \parallel \alpha,$$

$$\text{由此可得点 } D \text{ 到平面 } \alpha \text{ 的距离等于点 } H \text{ 到平面 } \alpha \text{ 的距离, 即 } DE = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle CDE \text{ 中, } \sin \angle DCE = \frac{DE}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

5. 已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\angle A = 90^\circ$, 边 BC 上一点 D 满足 $BD:DC = c:4b$, 若 $AD=1$, 则 $b+c$ 的最小值为_____.

【答案】 $\frac{9\sqrt{17}}{17}$.

【解析】 $\overrightarrow{AD} = \frac{4b}{c+4b} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{c+4b} \overrightarrow{AC}$, $AD=1$,

$$\text{故 } 1 = \left(\frac{4b}{c+4b} \right)^2 \cdot c^2 + \left(\frac{c}{c+4b} \right)^2 \cdot b^2, \text{ 即 } c+4b = \sqrt{17}bc,$$

$$b+c = \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\frac{1}{b} + \frac{4}{c} \right) (c+b) \geq \frac{9}{\sqrt{17}}, \text{ 当且仅当 } c=2b \text{ 时等号成立.}$$

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 共有 7 项, 且 $a_4^2 = a_1 a_7$, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 满足 $2S_n = a_n^2 + a_n (1 \leq n \leq 7)$, 则满足上述条件的数列 $\{a_n\}$ 共有_____个.

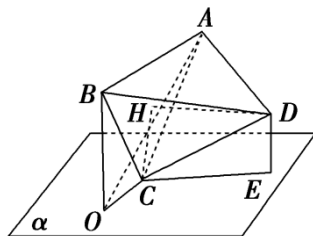
【答案】 23

【解析】 由 $2S_n = a_n^2 + a_n$ 得 $2S_{n-1} = a_{n-1}^2 + a_{n-1}$,

$$\text{作差得 } (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 1) = 0, n = 2, 3, 4, \dots, 7,$$

$$\text{故 } a_n = -a_{n-1} \text{ 或 } a_n = a_{n-1} + 1, \text{ 由 } 2S_1 = a_1^2 + a_1 \text{ 得 } a_1 = 0 \text{ 或 } a_1 = 1$$

(1) $a_1 = 0$ 时, $a_4 = 0$, a_5, a_6, a_7 任取, 而 a_1, a_2, a_3, a_4 只有 0, 0, 0, 0 和 0, 1, -1, 0 两种, 故共有 16 种可能;



(2) $a_1 = 1$ 时,

① a_1, a_4, a_7 的值为 $1, -1, 1$ 时, 此时数列 $\{a_n\}$ 有 4 种可能;

② a_1, a_4, a_7 的值为 $1, 1, 1$ 时, 此时数列 $\{a_n\}$ 只有 1 种可能;

③ a_1, a_4, a_7 的值为 $1, 0, 0$ 时, 此时数列 $\{a_n\}$ 有 2 种可能.

故共有 23 种可能.

7. 已知 $r_1, r_2, \dots, r_n$ 为 n 次首一多项式 $P(x)$ 的所有实数根, 若 $\frac{P(i)}{i^n} = 2020 + 2022i$ (这里 i 为虚数单位), 则

$\arctan r_1 + \arctan r_2 + \dots + \arctan r_n =$ _____.

【答案】 $k\pi + \arctan \frac{1011}{1010}$, $k \in \mathbf{Z}$

【解析】 记 $r_k = \tan \theta_k$, 则 $P(x) = \prod_{k=1}^n (x - \tan \theta_k)$, 故

$$\frac{P(i)}{i^n} = \prod_{k=1}^n (1 + i \tan \theta_k) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\cos \theta_k} \prod_{k=1}^n (\cos \theta_k + i \sin \theta_k) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\cos \theta_k} \left(\cos \left(\sum_{k=1}^n \theta_k \right) + i \sin \left(\sum_{k=1}^n \theta_k \right) \right),$$

$$\text{从而可知 } \frac{\sin \left(\sum_{k=1}^n \theta_k \right)}{\cos \left(\sum_{k=1}^n \theta_k \right)} = \frac{2022}{2020}$$

$$\text{故 } \arctan r_1 + \arctan r_2 + \dots + \arctan r_n = \sum_{k=1}^n \theta_k = k\pi + \arctan \frac{1011}{1010}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

8. 将 6×6 的方格表中的 12 个小方格染成黑色, 使得每行和每列均恰有 2 个黑格, 则不同的染色方式共有 _____ 种.

【解答】 67950

【解析 1】 记 $f(n)$ 为 $n \times n$ 时的染色方式数, 令每个黑格的“朋友”黑格为和它同行或者同列的黑格, 则每个黑格恰有两个“朋友”黑格. 假设其中 k 列的 $2k$ 个黑格形成一个圈, 即相邻两个黑格互为“朋友”黑格, 第一个黑格和最后一个黑格互为“朋友”黑格. k 可以取 $2, 3, 4, \dots, n$. 划掉这 $2k$ 个黑格, 会形成一个 $(n-k) \times (n-k)$ 的方格表, 方法数为 $f(n-k)$ 个.

$$\text{因此有 } f(n) = \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1)}{2} \cdot (n-1)(n-2) \cdot (n-2)(n-3) \cdots (n-k+1) f(n-k)$$

注意: 上述等式的意义为, 先在第一列找到两个黑格, $\frac{n(n-1)}{2}$ 种, 然后对于靠上的黑格, 找到它同行的“朋友”黑

格在哪一列, $(n-1)$ 种, 再在这一列找到另一个黑格 $(n-2)$ 种 (如果 $k=2$ 时, 这个黑格的位置是确定的). 依次

类推即可。

$$\text{故有当 } n \geq 2 \text{ 时, } \frac{f(n)}{n!(n-1)!} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{f(n-k)}{((n-k)!)^2}$$

将上式中的 n 替换为 $n-1$, 相减可知

$$\text{当 } n \geq 3 \text{ 时有, } \frac{f(n)}{n!(n-1)!} - \frac{f(n-1)}{(n-1)!(n-2)!} = \frac{1}{2} \frac{f(n-2)}{((n-2)!)^2}$$

$$\text{即 } f(n) = n(n-1)f(n-1) + \frac{1}{2}n(n-1)^2f(n-2)$$

由 $f(1)=0, f(2)=1$ 可知

$$f(3)=6$$

$$f(4)=4 \times 3 \times 6 + \frac{1}{2} \times 4 \times 9 \times 1 = 90$$

$$f(5)=5 \times 4 \times 90 + \frac{1}{2} \times 5 \times 16 \times 6 = 2040$$

$$f(6)=6 \times 5 \times 2040 + \frac{1}{2} \times 6 \times 25 \times 90 = 67950$$

【解析 2】

我们考虑一个分别以 6 行, 6 列为两个部分的二部图, 令其中一行与一列连边当且仅当这一行与这一列的交点处的方格被染黑了. 那么此二部图中每个顶点的度数均为 2. 于是此二部图为一一些圈的并, 且圈长均不小于 2. 接下来我们考虑当在两部分中分别选定 k 个点时, 使得这 $2k$ 个点构成一个圈的连边方法数. 我们首先确定包含于这个圈的一个匹配, 共 $k!$ 个. 而注意到一个连边方法构成的圈恰包含两个匹配, 而每个匹配被 $(k-1)!$ 个圈包含 (考虑将 k

个匹配在圈上排列), 故连边方法共有 $\frac{k!(k-1)!}{2}$ 种.

当二部图整个为一个长为 6 的圈时, 有 $\frac{6!5!}{2} = 43200$ 种;

当二部图由一个长为 4 的圈与长为 2 的圈构成时, 有 $(C_6^2)^2 \times \frac{4!3!}{2} \times \frac{2!1!}{2} = 16200$ 种;

当二部图由两个长为 3 的圈构成时, 有 $\frac{1}{2!} \times (C_6^3)^2 \times \frac{3!2!}{2} \times \frac{3!2!}{2} = 7200$ 种;

当二部图由三个长为 2 的圈构成, 有 $\frac{1}{3!} \times (C_6^2)^2 \times (C_4^2)^2 \times \left(\frac{2!1!}{2}\right)^3 = 1350$ 种.

故共有 $43200 + 16200 + 7200 + 1350 = 67950$ 种.

二、解答题 (本大题共 3 道小题, 第 9 题 16 分, 第 10 题 20 分, 第 11 题 20 分, 共 56 分)

9. 已知集合 $D = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 = 2k\}$, 其中 k 为正常数, 若不等式 $(\frac{1}{x_1} - x_1)(\frac{1}{x_2} - x_2) \geq (k - \frac{1}{k})^2$ 对

任意 $(x_1, x_2) \in D$ 恒成立, 试求 k 的取值范围.

【解析】

令 $u = x_1 x_2$, 则由基本不等式, 有 $0 < u \leq k^2$.

$$\left(\frac{1}{x_1} - x_1\right)\left(\frac{1}{x_2} - x_2\right) = \frac{1}{x_1 x_2} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} + x_1 x_2 = x_1 x_2 - \frac{k^2 - 1}{x_1 x_2} + 2 = u - \frac{4k^2 - 1}{u} + 2.$$

.....4 分

$$\text{记 } f(u) = u - \frac{4k^2 - 1}{u} + 2.$$

当 $k \geq \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(u)$ 在 $(0, k^2]$ 上是增函数, 则 $f(u) \leq f(k^2) = \left(k - \frac{1}{k}\right)^2$.

矛盾.

故要使 $f(u) \geq \left(k - \frac{1}{k}\right)^2$, 则 $0 < k < \frac{1}{2}$.

.....8 分

由对勾函数性质可知, $f(u) = u + \frac{1 - 4k^2}{u} + 2$ 在 $(0, \sqrt{1 - 4k^2}]$ 上递减, 在 $(\sqrt{1 - 4k^2}, +\infty)$ 上递增, 要使 $f(u)$ 在

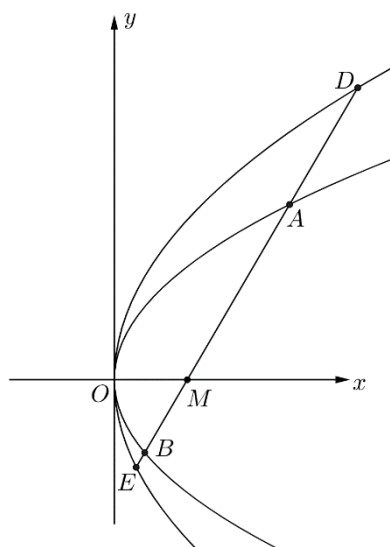
$(0, k^2]$ 恒有 $f(u) \geq \left(k - \frac{1}{k}\right)^2 = f(k^2)$, 则必有 $k^2 \leq \sqrt{1 - 4k^2}$,

解得 $0 < k \leq \sqrt{\sqrt{5} - 2}$. 故所求 k 的取值范围为 $0 < k \leq \sqrt{\sqrt{5} - 2}$.

.....16 分

10. 已知直线 l 分别与两抛物线 $C_1: y^2 = 2px (p > 0)$ 和 $C_2: y^2 = 4px$ 交于四个不同的点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$

$D(x_3, y_3), E(x_4, y_4)$, 且 $y_4 < y_2 < y_1 < y_3$. 设 l 与 x 轴交于点 M , 若 $AD = 6BE$, 求 $\frac{AM}{ME}$ 的值.



解: 由题意, 直线 l 的斜率存在, 设直线 l 的方程为 $y = kx + m$, 则

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = kx + m \end{cases} \Rightarrow ky^2 - 2py + 2pm = 0 \Rightarrow \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} = \frac{1}{m}$$

同理可知 $\frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_4} = \frac{1}{m}$, 故 $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_4}$,

.....5 分

从而有

$$\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_3} = \frac{1}{y_4} - \frac{1}{y_2} \Rightarrow \frac{y_3 - y_1}{y_1 y_3} = \frac{y_2 - y_4}{y_2 y_4} \Rightarrow \frac{AD}{BE} = \frac{|y_3 - y_1|}{|y_2 - y_4|} = \frac{|y_1 y_3|}{|y_2 y_4|}$$

.....10 分

由于 $y_1 y_2 = \frac{2pm}{k}$, $y_3 y_4 = \frac{4pm}{k}$, 故

$$\frac{y_1 y_3}{y_2 y_4} = \frac{y_1 \cdot \frac{4pm}{ky_4}}{\frac{2pm}{ky_1} \cdot y_4} = \frac{2y_1^2}{y_4^2} = 6$$

因此 $\frac{AM}{ME} = \frac{|y_1|}{|y_4|} = \sqrt{3}$.

.....20 分

11. 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $a_1 = 2, b_1 = 0, a_2 = 2, b_2 = 2$, 且对任意正整数 $n \geq 3$, 有 $a_n = a_{n-1}a_{n-2} - b_{n-1}b_{n-2}$,

$b_n = a_{n-1}b_{n-2} + a_{n-2}b_{n-1}$, 求 $|a_{2022}|$ 的末两位数字.

【解析】

令 $z_n = a_n + b_n i$, 其中 i 为虚数单位,

则有 $z_n = z_{n-1}z_{n-2}$, 其中 $n \geq 3$,

$$z_1 = 2$$

$$z_2 = 2 + 2i$$

故 $z_n = 2^{F_n} (1+i)^{F_{n-1}}$, 当 $n \geq 3$ 时. 其中 F_n 为斐波那契数列, $F_1 = F_2 = 1$.

.....5 分

$$z_{2022} = 2^{F_{2022}} (1+i)^{F_{2021}}$$

由于斐波那契数列的模周期性, 可知 F_{2021} 为奇数 (事实上 F_n 为偶数, 当且仅当 $3|n$).

$$\text{故 } z_{2022} = 2^{F_{2022}} (2i)^{\frac{F_{2021}-1}{2}} (1+i)$$

$$\text{因此 } |a_{2022}| = 2^{\frac{F_{2021}-1}{2} + F_{2022}}$$

.....10 分

显然 $4 \mid 2^{\frac{F_{2021}-1}{2}+F_{2022}}$ ，故只需计算 $2^{\frac{F_{2021}-1}{2}+F_{2022}}$ 除以 25 的余数，由于 $\varphi(25)=20$ ，即只需考虑 $\frac{F_{2021}-1}{2}+F_{2022}$

除以 20 的余数，

即只需考虑 $F_{2021}-1+2F_{2022}$ 除以 5 的余数和除以 8 的余数.

由斐波那契数列的模周期性，模 5 具有周期 20，模 8 具有周期 12，

故 $F_{2021} \equiv F_1 \equiv 1 \pmod{5}$ ， $F_{2021} \equiv F_5 \equiv 5 \pmod{8}$

$F_{2022} \equiv F_2 \equiv 1 \pmod{5}$ ， $F_{2022} \equiv F_6 \equiv 0 \pmod{8}$

故 $F_{2021}-1+2F_{2022} \equiv 2 \pmod{5}$ ， $F_{2021}-1+2F_{2022} \equiv 4 \pmod{8}$

故 $\frac{F_{2021}-1+2F_{2022}}{2} \equiv 6 \pmod{20}$

故 $2^{\frac{F_{2021}-1}{2}+F_{2022}} \equiv 2^6 = 64 \equiv 14 \pmod{25}$

故 $2^{\frac{F_{2023}-1}{2}+F_{2020}} \equiv 64 \pmod{100}$

即 $|a_{2022}|$ 的末两位数字为 64.

.....20 分

2022 年中国数学奥林匹克希望联盟夏令营试题（三）

考试时间：2022 年 7 月 30 日上午 9:40 — 12:30

一、（本题满分 40 分）

已知正实数 $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ ，证明：

$$\sum_{i=1}^n \frac{(i! a_1 a_2 \cdots a_i)^{\frac{1}{i}}}{i+1} \leq 1.$$

二、（本题满分 40 分）

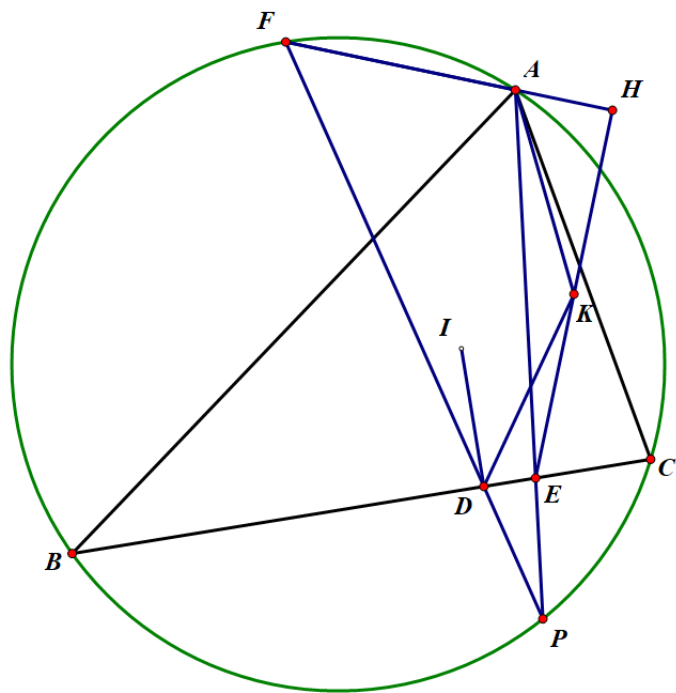
证明：存在无限多个不能表示为 $n^3 + p$ 的正整数，其中 $n \in N_+$ ， p 为质数.

三、（本题满分 50 分）

求正整数 a, b 应满足的条件，使得能够将集合 $\{1, 2, \dots, ab\}$ 分成 a 个不相交的 b 元子集，满足每个子集的元素和都相等.

四、（本题满分 50 分）

如图， $\triangle ABC$ 的内心为 I ，外接圆为 Γ ， $ID \perp BC$ 于点 D ， F 为弧 BAC 中点，直线 FD 交 Γ 于另一点 P ， PA 与 BC 交于点 E ， $EH \perp AF$ ，垂足为 H ， K 为 EH 中点. 证明： $AK = DK$.（答题时请将图画在答卷纸上）



2022 年中国数学奥林匹克希望联盟夏令营试题（三）

考试时间：2022 年 7 月 30 日上午 9:40 — 12:30

一、（本题满分 40 分）

已知正实数 $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ ，证明：

$$\sum_{i=1}^n \frac{(i! a_1 a_2 \cdots a_i)^{\frac{1}{i}}}{i+1} \leq 1.$$

证明：因为 $(i! a_1 a_2 \cdots a_i)^{\frac{1}{i}} \leq \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + ia_i}{i}$ ；

.....10 分

则只需证： $\sum_{i=1}^n \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + ia_i}{i(i+1)} \leq 1$ ，

记 $S_i = a_1 + 2a_2 + \cdots + ia_i$ ， $i=1, 2, \dots, n$ ，并记 $S_0 = 0$ ，

则 $a_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{i}$ ，

$$1 = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \frac{S_i - S_{i-1}}{i} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) S_i + \frac{1}{n} S_n \geq \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{i(i+1)}.$$

故得证.

.....40 分

二、(本题满分 40 分)

证明：存在无限多个不能表示为 $n^3 + p$ 的正整数，其中 $n \in N_+$ ， p 为质数.

证明：

取数 $m = (13k + 8)^3$ ($k \in N_+$)，下证 $m \neq n^3 + p$.

.....20 分

假设 $m = n^3 + p$ ，则 $p = (13k + 8)^3 - n^3 = (13k + 8 - n)((13k + 8)^2 + (13k + 8)n + n^2)$

(1) 当 $1 \leq n \leq 13k + 6$ 时，则 p 为两个大于 1 的数之积，与 p 为质数矛盾.

(2) 当 $n = 13k + 7$ 时， $p = (13k + 8)^2 + (13k + 8)(13k + 7) + (13k + 7)^2 \equiv 8^2 + 8 \times 7 + 7^2 \equiv 0 \pmod{13}$

但显然 $p > 13$ ，这与 p 为质数矛盾.

综上，形如 $m = (13k + 8)^3$ ($k \in N_+$) 的数均符合题意.

.....40 分

注：事实上，取模 7 也可以顺利解决该问题.

三、(本题满分 50 分)

求正整数 a, b 应满足的条件, 使得能够将集合 $\{1, 2, \dots, ab\}$ 分成 a 个不相交的 b 元子集, 满足每个子集的元素和都相等.

解: (a, b) 应为以下情况之一: 1) $a=1, b \in \mathbf{N}^*$ 2) a, b 均为偶数 3) a 为大于 1 的奇数, b 为大于 1 的正整数.

.....10 分

下面来证明这一结果:

1. 如果 $a=1$, 显然 b 可以取任意正整数.

2. a 为偶数时:

(1) 如果 b 为偶数, 取 $(k=1, 2, \dots, a)$,

$$A_k = \left\{ \frac{(k-1)b}{2} + 1, \frac{(k-1)b}{2} + 2, \dots, \frac{kb}{2} \right\} \cup \left\{ ab + 1 - \frac{kb}{2}, ab + 2 - \frac{kb}{2}, \dots, ab - \frac{(k-1)b}{2} \right\}, \text{ 符合要求. } (*)$$

(2) 如果 b 为奇数, 那么由于 $\frac{(1+\dots+ab)}{b} = \frac{b(ab+1)}{2}$ 不是整数, 所以不符合要求.

.....20 分

3. a 为大于 1 的奇数时:

(1) 如果 b 是偶数, 构造 $(*)$ 仍然成立.

(2) 如果 $b=1$, 显然不符合要求.

(3) $b=3$ 时,

设 $a=2k+1$, 我们要将 $\{1, 2, 3, \dots, 6k+3\}$ 划分成 $2k+1$ 个三元集, 满足元素和都相等. 直接给出划分

如下:

$$\{6k+3, 2k+2, k+1\},$$

$$\{6k+2, 2k+4, k\},$$

...

$$\{5k+3, 4k+2, 1\},$$

$$\{5k+2, 2k+3, 2k+1\},$$

$$\{5k+1, 2k+5, 2k+2\}$$

...

$$\{4k+3, 4k+1, k+2\}.$$

即 $b=3$ 时, 符合题意

.....40 分

(4) 对奇数 $b>3$, 由于 $\{1, 2, \dots, ab\} = \{1, 2, \dots, 3a\} \cup \{3a+1, \dots, ab\}$, 前者可以应用 $b=3$ 时的情况分成

a 个集合 $\{X_i : i=1, 2, \dots, a\}$, 元素个数与元素和都相等. 而后者有 $a(b-3)$ 个元素, 可以用之前方法分成 a 个 $b-3$ (偶数) 元集 $\{Y_i : i=1, 2, \dots, a\}$, 每个集合的元素和都相等. 于是

$$\{X_i \cup Y_i : i=1, 2, \dots, a\}$$

给出了符合条件的划分.

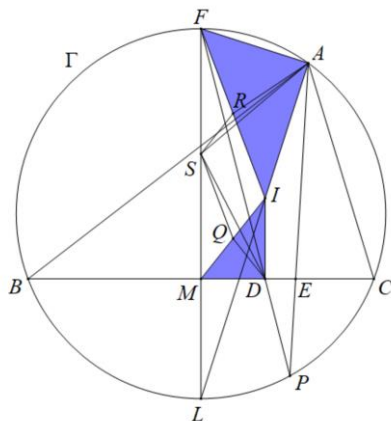
.....50 分

四、(本题满分 50 分)

如图, $\triangle ABC$ 的内心为 I , 外接圆为 Γ , $ID \perp BC$ 于点 D , F 为弧 BAC 中点, 直线 FD 交 Γ 于另一点 P , PA 与 BC 交于点 E , $EH \perp AF$, 垂足为 H , K 为 EH 中点.
证明: $AK = DK$. (答题时请将图画在答卷纸上)

证明: (提醒: 最后有备注)

设 M 为 BC 中点, L 为 BPC 中点, 则 L, M, F 三点共线为直径; A, I, L 三点共线.



连结 IF 、 IM , 因为 $LI^2 = LB^2 = LM \cdot LF$, 所以 $\triangle IML \sim \triangle FIL$,

所以 $\angle AIF = \angle IMF = \angle MID$, 所以 $\triangle AFI \sim \triangle DMI$. $\angle IFA = \angle IMD$

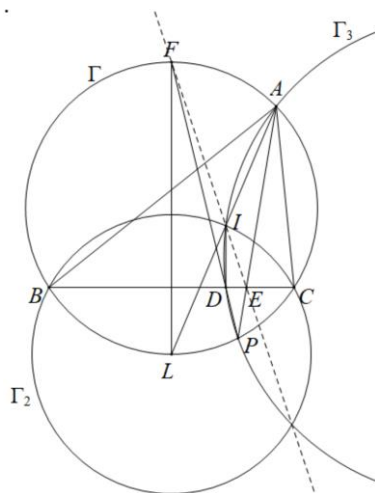
.....10 分

取 $\triangle IFM$ 三边中点 S 、 Q 、 R , 则 $SR = IQ = QD$, $SQ = IR = RA$,

$\angle SQD = \angle SQI + \angle IQD = \angle SRI + \angle IRA = \angle SRA$,

所以 $\triangle ARS \cong \triangle SQD$, $SA = SD$.

.....20 分



以 L 为圆心, LI 为半径作圆 Γ_2 , 易得 B 、 C 也在上 Γ_2 上.

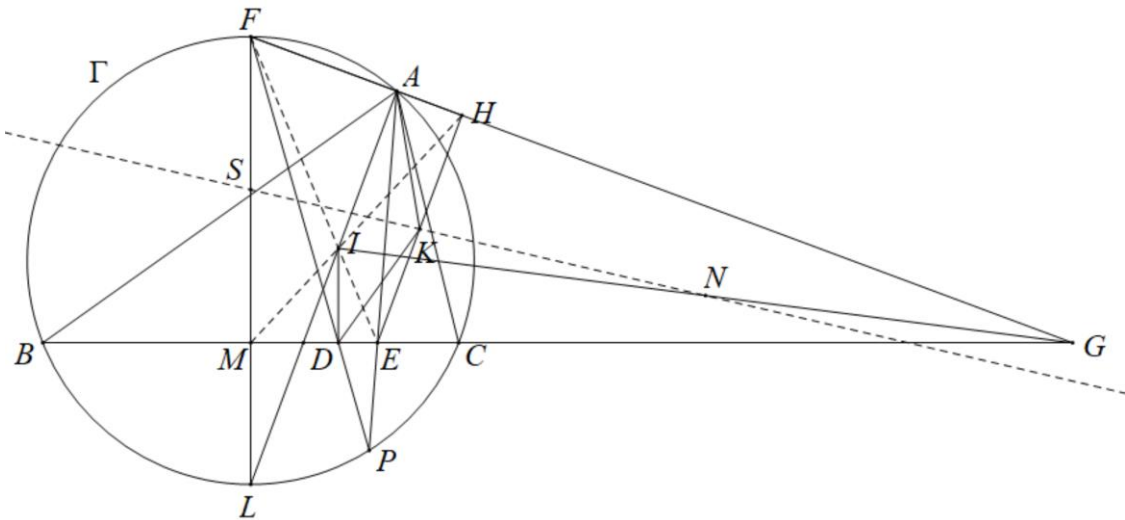
因为 $\angle DIL = \angle FLA = \angle FPA$, 所以 I, D, A, P 四点共圆于 Γ_3 ,

因为 $EB \cdot EC = EP \cdot EA$, 所以 E 在 Γ_2 和 Γ_3 的根轴上.

因为 $\angle FBD = \angle FPB$, 所以 $\triangle FBD \sim \triangle FPB$, $FB^2 = FD \cdot FP$,

所以 F 在 Γ_2 和 Γ_3 的根轴上. 从而 I, E, F 三点共线.

.....30 分



因为 $\angle EHF = \angle EMF$, 所以 M, E, H, F 四点共圆.
 所以 $\angle IME = \angle IFH = \angle EMH$, 所以 M, I, H 三点共线.

.....40 分

延长 FH , MC 交于点 G , 取 IG 中点 N .

由 $NA = ND, SA = SD$, 知 NS 是线段 AD 的中垂线.

在完全四边形 $GHFIME$ 中, 由牛顿定理, 知 N, S, K 三点共线.
 故 $KA = KD$.

.....50 分

备注:

- (1) 单独得到 I, E, F 三点共线可得到 10 分
- (2) 单独得到 M, I, H 三点共线可得到 10 分