2022—2023 学年下期期末联考

高二数学参考答案

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	D	A	C	B	A	C

1.【答案】A

【解析】由 $x^2 \leqslant 1$，即 $(x-1)(x+1) \leqslant 0$，解得 $-1 \leqslant x \leqslant 1$，所以 $B=\{x|-1 \leqslant x \leqslant 1\}$，所以

$A \cup B=\{x|-1 \leqslant x<4\}$.故选 A .

2.【答案】C

【解析】 $f'(x)=4x^3-2$， $f'(1)=2$，易得切线方程为 $y=2x-3$，故选 C.

3.【答案】D

【解析】玉衡和天权都没有被选中的概率为 $P=\dfrac{C_5^3}{C_7^3}=\dfrac{2}{7}$，故选 D.

4.【答案】A

【解析】$lga>lgb \Rightarrow a>b>0 \Rightarrow \sqrt{a}>\sqrt{b}$，故充分性成立，反之，若 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$，有可能 $b=0$，

此时 $\lg a>\lg b$ 不成立，所以 $lga>lgb$ 是 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$ 的充分不必要条件，故选 A.

5.【答案】C

【解析】由题正态曲线关于直线 $x=0$ 对称，因为 $f(x)=P(X \geq x)(x>0)$，根据对称性可

得 $f(-x)=P(X \leq x)=1-f(x)$，即 $f(-x)+f(x)=1$，故选 C.

6.【答案】B

【解析】记事件 A 表示“球取自甲箱”，事件 $\overline{A}$ 表示“球取自乙箱”，事件 B 表示“取得黑球”，

则 $P(A)=P(\overline{A})=\dfrac{1}{2}$，$P(B|A)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$，$P(B|\overline{A})=\dfrac{2}{5}$，由全概率公式得 $P(B)=$

$P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{11}{30}$.故选 B.

7.【答案】A

【解析】含 x^4 的项应为：$C_5^4 x^4(-1)^1(-2)+C_5^3 x^3(-1)^2 x$，所以 x^4 系数为 20.故选 A.

8.【答案】C

【解析】由题：$1+\ln b=e^{2-\ln b}=e^{3-(1+\ln b)}$，可设 $f(x)=x-e^{3-x}$，则 $f'(x)=1+e^{3-x}>0$，即 $y=f(x)$ 恒增，于是有 $a=1+\ln b$，且 $\ln a=\ln e^{3-a}=3-a$，故 $\ln ab=3-a+(a-1)$ $=2$，所以 $ab=e^2$，故选 C.

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.）

题号	9	10	11	12
答案	AB	CD	CD	ACD

9.【答案】AB

【解析】由已知，可得 $\bar{x}=3$，$\bar{y}=140$，A 正确；代入计算得 $\hat{b}=44.3$，B 正确；从而相关系数 $r>0$，C 错误；可预测 6 月份的服装销量为 272.9 万件，D 错误.故选 AB.

10.【答案】CD

【解析】由 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+x-b=\dfrac{x^2-bx+1}{x}(x>0)$，则可知 $f'(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，因为 $x>0$，设 $u(x)=x^2-bx+1$，因为 $u(0)=1>0$，则只要 $\begin{cases}\dfrac{b}{2}>0,\\ b^2-4>0,\end{cases}$ 解得 $b>2$，故选 CD.

11.【答案】CD

【解析】设男女大学生各有 m 人，根据题意画出 2×2 列联表，如下图：

	看	不看	合计
男	$\frac{5}{6}m$	$\frac{1}{6}m$	m
女	$\frac{2}{3}m$	$\frac{1}{3}m$	m
合计	$\frac{3}{2}m$	$\frac{1}{2}m$	$2m$

所以 $\chi^2=\dfrac{2m\left(\frac{5}{6}m\times\frac{1}{3}m-\frac{1}{6}m\times\frac{2}{3}m\right)^2}{\frac{3}{2}m\times\frac{1}{2}m\times m\times m}=\dfrac{2m}{27}$，因为有 99%的把握认为性别与对产品是否满意有关，所以 $\dfrac{2m}{27}>6.635$，解得 $2m>179.145$，结合选项，故选 CD.

12.【答案】ACD

【解析】对于A，因为$a>0$，$b>0$，且$a+b=6$，所以$(1+a)(1+b)=1+a+b+ab=7+ab$

$\le 7+\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=16$，当且仅当$a=b=3$时等号成立，故A正确；对于B，

$\dfrac{(\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+3})^2}{2}\le 2a+1+2b+3=16$，故$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+3}\le 4\sqrt{2}$，当且仅当

$a=\dfrac{7}{2},b=\dfrac{5}{2}$时等号成立，故B不正确；对于C，$a-b=2a-6>-6$，所以

$2^{a-b}>2^{-6}=\dfrac{1}{64}$，故C正确；对于D，因为$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{6}(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=$

$\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+2\right)\geqslant\dfrac{1}{6}\times\left(2\sqrt{\dfrac{b}{a}\times\dfrac{a}{b}}+2\right)=\dfrac{2}{3}$，当且仅当$a=b=3$时取等号，所以

$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\geqslant\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^2\geqslant\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{2}{9}$，当且仅当$a=b=3$时取等号.故D正确；故选ACD.

三、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13.【答案】25

【解析】由题知，共有$(2,4),(3,3)$两种分法：$(2,4)$这种分法数为$C_6^4C_2^2=15$种；$(3,3)$这种分法数为$\dfrac{C_6^3C_3^3}{2!}=10$种，所以，共有25种.

14.【答案】1

【解析】易知$f'(x)=-\ln x$，$\therefore x\in(0,1)$时，$f'(x)>0$；$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$在$(0,1)$单增，$(1,+\infty)$单减，$\therefore f(x)_{\max}=f(1)=1$.

15.【答案】$\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$

【解析】因为$f'(x)=-3x^2+2mx-1$，只需$\Delta\le 0$，解得$-\sqrt{3}\le m\le\sqrt{3}$，即

$m\in\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$.

16.【答案】$\dfrac{2+\ln 2}{2}$

【解析】$y=2e^{x}+x$ 得 $y'=2e^{x}+1$，令 $2e^{x}+1=2$ 得 $x=\ln\dfrac{1}{2}$，得切点坐标

$\left(\ln\dfrac{1}{2},1+\ln\dfrac{1}{2}\right)$，再令 $2x-1=1+\ln\dfrac{1}{2}$，得 $x=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}$，于是符合题意的

$x_2=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}$，$x_1=\ln\dfrac{1}{2}$，因此：$x_2-x_1=1-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}=\dfrac{2+\ln 2}{2}$.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.【解析】

（1）当 a=4 时，得 $3x^2-5x+2>0$，$(3x-2)(x-1)>0$，解得 $x>1$ 或 $x<\dfrac{2}{3}$，

所以此不等式的解集为 $(-\infty,\dfrac{2}{3})\cup(1,+\infty)$．……………………………………………5 分

（2）当 $x>0$ 时，不等式 $\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{1}{x}-3x$ 恒成立，可得 $a+1<6x+\dfrac{1}{x}$ 对 $\forall x>0$ 都成立，

由于 $6x+\dfrac{1}{x}\geq 2\sqrt{6}$，当且仅当 $6x=\dfrac{1}{x}$ 即 $x=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ 时等号成立，所以 $a+1<2\sqrt{6}$，即

$a<2\sqrt{6}-1$，故实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2\sqrt{6}-1)$．……………………………………10 分

18.【解析】

（1）由题得 $f'(x)=6x^2-2ax$，……………………………………………………………1 分

当 $a\leq 0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调递增，且 $f(x)>f(0)=1$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内无零点；………………………………………………………………………3 分

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调递增；在区间 $\left(0,\dfrac{a}{3}\right)$ 内单调递减，在区间 $\left(\dfrac{a}{3},+\infty\right)$ 内单调递增．当 $x=0$ 时，$f(0)=1$；……………………………………………5 分

故只需 $f\left(\dfrac{a}{3}\right)=0$，……………………………………………………………………6 分

解得 $a=3$．……………………………………………………………………………………7 分

（2）由 $f(-\dfrac{1}{2})=0$，所以切点为 $(-\dfrac{1}{2},0)$，……………………………………………8 分

又 $f'(-\frac{1}{2})=\frac{9}{2}$，……………………………………………………………………9 分

故切线方程为 $y-0=\frac{9}{2}(x-(-\frac{1}{2}))$，……………………………………………………10 分

化简得：$18x-4y+9=0$.……………………………………………………………………12 分

19.【解析】

（1）根据抽查数据，该市 100 天空气中的 PM2.5 浓度不超过 75，且 SO_2 浓度不超过 150 的天数为 32＋18＋6＋8＝64，因此该市一天空气中 PM2.5 浓度不超过 75，且 SO_2 浓度不超过 150 的概率的估计值为 $\frac{64}{100}=0.64$.……………………………………………………6 分

（2）根据抽查数据，可得 2×2 列联表：

PM2.5 浓度	SO_2 浓度	
	[0，150]	(150，475]
[0，75]	64	16
(75，115]	10	10

零假设为 H_0：该市一天空气中 PM2.5 浓度与 SO_2 浓度无关．由列联表中的数据得:

$\chi^2=\frac{100\times(64\times10-16\times10)^2}{80\times20\times74\times26}\approx7.484$.……………………………………………10 分

由于 7.484>6.635＝$\chi_{0.01}$，所以依据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为该市一天空气中 PM2.5 浓度与 SO_2 浓度有关．………………………12 分

20.【解析】

（1）因为 $f(x)=(x-1)e^x$，所以 $f'(x)=xe^x$，

当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以当 $x=0$ 时，函数取得最小值 $f(0)=-1$.……………………………………………4 分

（2）函数的定义域为 R，$g'(x)=xe^x-a$，

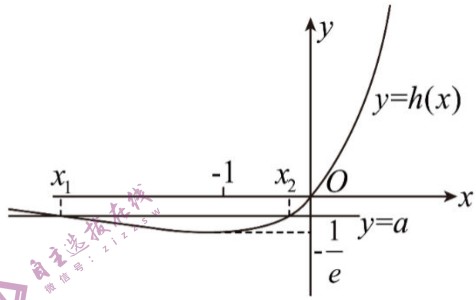
设 $h(x)=xe^x$，$h'(x)=(x+1)e^x$，由 $h'(x)=(x+1)e^x=0$，得 $x=-1$，

列表如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	减	极小值$-\frac{1}{e}$	增

当 $x<0$ 时，$h(x)=xe^x<0$，

当 $x>0$ 时，$h(x)=xe^x>0$，…………7 分



做出函数 $h(x)$ 与 $y=a$ 的大致图象，如图，

当 $-\frac{1}{e}<a<0$ 时，直线 $y=a$ 与 $y=h(x)$ 的图象有 2 个交点，…………………………………………………………9 分

设这两个交点的横坐标分别为 x_1, x_2，且 $x_1<x_2$，

数形结合可知：当 $x<x_1$ 或 $x>x_2$ 时，$g'(x)=xe^x-a>0$，

当 $x_1<x<x_2$ 时，$g'(x)=xe^x-a<0$，此时函数 $g(x)$ 有 2 个极值点. …………11 分

所以 a 的取值范围是 $-\frac{1}{e}<a<0$. ……………………………………12 分

21.【解析】

（1）由题意，X 可取 0，1，2，3，4.

$P(X=0)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9}$，………………………………1 分

$P(X=1)=C_2^1\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}$，………………………………2 分

$P(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{9}$，………………………………3 分

$P(X=3)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times C_2^1\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{9}$，………………………………4 分

$P(X=4)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{9}$，………………………………5 分

则 X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

$E(X)=0\times\frac{1}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{1}{9}+3\times\frac{2}{9}+4\times\frac{1}{9}=\frac{16}{9}$.……………………………………7 分

（2）每一轮获得纪念章的概率为 $P=P(X=3)+P(X=4)=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$，……………8 分

每一轮相互独立，则每一轮比赛可视为二项分布，………………………………9 分

设 4 轮答题获得纪念章的数量为 Y，则 $Y\sim B\left(4,\frac{1}{3}\right)$，……………………………10 分

$P(Y=2)=C_4^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{4-2}=\frac{8}{27}$，……………………………………………………11 分

即甲同学则获得 2 枚纪念章的概率是 $\frac{8}{27}$.………………………………………………12 分

22.【解析】

（1）因为 $f(x)=a\ln x-2x$ 定义域为 $(0,+\infty)$，

所以 $f'(x)=\frac{a}{x}-2=\frac{-2x+a}{x}$，……………………………………………………………1 分

①当 $a\leqslant 0$ 时，恒有 $f'(x)<0$，得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；………………………2 分

②当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{a}{2}$，在 $(0,\frac{a}{2})$ 上，有 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

在 $(\frac{a}{2},+\infty)$ 上，有 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.…………………………………………4 分

综上可得：当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；当 $a>0$ 时，在 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 上单调递增，

在 $\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$ 上单调递减；……………………………………………………………………5 分

（2）方程 $f(x)+x(2+a)=xe^x$ 可化为 $xe^x=ax+a\ln x$，

即 $e^{x+\ln x}=a(x+\ln x)$.………………………………………………………………………6 分

令 $t(x)=x+\ln x$，易知函数 $t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，……………………………7 分

结合题意，关于 t 的方程 $e^t=at$（*）有两个不等的实根.………………………………8 分

又因为$t=0$不是方程（*）的实根，所以方程（*）可化为$\dfrac{e^t}{t}=a$. ………………9 分

令$g\left(t\right)=\dfrac{e^t}{t}$，则$g'\left(t\right)=\dfrac{e^t\left(t-1\right)}{t^2}$. ……………………………………………………10 分

易得函数$g\left(t\right)$在$\left(-\infty,0\right)$和$\left(0,1\right)$上单调递减，在$\left(1,+\infty\right)$上单调递增. …………11 分

数形结合可知，实数a的取值范围是$\left(e,+\infty\right)$. ………………………………………12 分