参考答案及解析

数学(一)

一、选择题

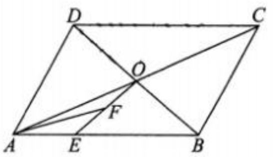
1. B 【解析】由题可得 $\bar{z}=\frac{8i-2}{1-i}=\frac{(8i-2)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-5+3i$,所以 $z=-5-3i$,其虚部为 -3. 故选 B.

2. A 【解析】由题可得 $M=[0,3]$,$N=[a-2,a+2]$,所以 $\complement_{\mathbf{R}}M=(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$,因为 $(\complement_{\mathbf{R}}M)\cup N=\mathbf{R}$,所以 $\begin{cases}a-2\leqslant 0\\ a+2\geqslant 3\end{cases}$,解得 $1\leqslant a\leqslant 2$,所以实数 a 的取值范围为 $[1,2]$. 故选 A.

3. A 【解析】由 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$,得 $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{3}$,所以 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{2}{3}$,两边平方得 $1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4}{9}$,所以 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{5}{18}$,所以 $\frac{\tan\alpha-1}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=-\frac{12}{5}$. 故选 A.

4. C 【解析】设这人第 n 天布施了 a_n 德拉玛,记前 n 天总共布施了 S_n 德拉玛,则数列 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1=4$,公差 $d=5$ 的等差数列,则这人最后 7 天布施的德拉玛总数为 $S_{15}-S_8=15a_1+105d-(8a_1+28d)=7a_1+77d=7\times4+77\times5=413$. 故选 C.

5. A 【解析】由已知得 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}=\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}=\frac{5}{12}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$. 故选 A.



6. C 【解析】不妨设椭圆 C 的右焦点为 F,左焦点为 F',由椭圆的对称性可知 $|PF|+|QF|=|PF|+|PF'|=2a=10$. 设 $|PF|=t$,则 $a-c\leqslant t\leqslant a+c$,又 $c=\sqrt{25-16}=3$,所以 $2\leqslant t\leqslant 8$,所以 $|PF|^2+6|QF|=f(t)=t^2+6(10-t)=(t-3)^2+51$,当 $t=3$ 时,$f(t)$ 取得最小值 51,又 $f(2)=52$,$f(8)=76$,所以 $|PF|^2+6|QF|$ 的取值范围为 $[51,76]$. 故选 C.

7. C 【解析】将函数 $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $a(0<a<2)$ 个单位长度,得到 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}-2a\right)$,又 $g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)$,所以 $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}-2a\right)=\cos\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)$,所以 $2x+\frac{\pi}{6}-2a=2k\pi\pm\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)(k\in\mathbf{Z})$. 当 $2x+\frac{\pi}{6}-2a=2k\pi+\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 时,$a=\frac{\pi}{2}-k\pi(k\in\mathbf{Z})$,又 $0<a<2$,所以 $a=\frac{\pi}{2}$;当 $2x+\frac{\pi}{6}-2a=2k\pi-\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 时,a 随 x 的变化而变化,不可能为常数,不合题意,所以 $a=\frac{\pi}{2}$. 对于 $f(x)$,令 $2k\pi-\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得 $-\frac{7\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant-\frac{\pi}{12}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,当 $x\in(0,\pi)$ 时,令 $k=1$,则 $\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{11\pi}{12}$;对于 $g(x)$,令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得 $\frac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{11\pi}{12}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,当 $x\in(0,\pi)$ 时,令 $k=0$,则 $\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{11\pi}{12}$,所以当 $f(x)$ 在区间 (m,n) 上单调递增,$g(x)$ 在区间 (m,n) 上单调递减时,n 的最大值为 $\frac{11\pi}{12}$,m 的最小值为 $\frac{5\pi}{12}$,所以 $\frac{an}{\pi}-m=\frac{n}{2}-m$ 的最大值为 $\frac{1}{2}\times\frac{11\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{24}$. 故选 C.

8. D 【解析】令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$,$x>0$,则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,当 $x\in(0,e)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,所以 $f(1.2)<f(1.3)$,即 $\frac{\ln 1.2}{1.2}<\frac{\ln 1.3}{1.3}$,所以 $1.3\ln 1.2<1.2\ln 1.3$,即 $a<b$. 令 $g(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$,$x>0$,当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$,$g(x)$ 单调递增,又 $g(1)=0$,所以 $g(x)>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立,所以 $g(1.2)=\ln 1.2-\frac{2\times0.2}{2.2}>0$,即 $\ln 1.2>\frac{2\times0.2}{2.2}=\frac{2}{11}$,所以 $1.3\ln 1.2>1.3\times\frac{2}{11}=\frac{13}{55}$,即 $c<a$,所以 $c<a<b$. 故

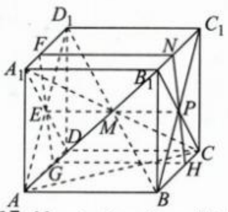
选 D.

二、选择题

9. AD 【解析】由条形统计图可知,在 2021 年的月度销量数据中,只有 2 月份的销量低于 60 万辆,且有多个月的销量达到 80 万辆以上,故 2021 年国产品牌乘用车月度平均销量超过 60 万辆,A 正确;由折线统计图可知,2022 年 4 月份的同比增长率为负数,B 错误;将 2022 年前 9 个月的销量数据由小到大排列,可知 5 月份的销量排在第 3 位,故该数据不可能为中位数,C 错误;2022 年前 10 个月销量最大的月份为 10 月份,销量为 118.7 万辆,销量最小的月份为 4 月份,且销量数据低于 60 万辆,故极差超过 $118.7-60=58.7$ 万辆,D 正确. 故选 AD.

10. BC 【解析】根据题意令 $x=1$,得 $-(1-a)^5=1$,则 $a=2$,A 错误;所以 $(1-2x^3)(\sqrt{x}-a)^5=(1-2x^3)\cdot(\sqrt{x}-2)^5$,$(\sqrt{x}-2)^5$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=(-2)^kC_5^kx^{\frac{5-k}{2}}$,$k=0,1,\cdots,5$,所以展开式中的常数项为 $(-2)^5C_5^5=-32$,B 正确;含 x^4 的项为 $-2x^3\cdot(-2)^3C_5^3x=160x^4$,其系数为 160,C 正确;展开式中无理项的系数之和为 $-[(-2)^0C_5^0+(-2)^2C_5^2+(-2)^4C_5^4]=-121$,D 错误. 故选 BC.

11. ABC 【解析】如图,连接 A_1D,BC_1,B_1C,则 $A_1D\cap AD_1=E$,由正方体的性质可得点 E 是侧面 ADD_1A_1 的中心,点 M 是正方体的中心,所以连接 EM 并延长交侧面 BCC_1B_1 于点 P,则点 P 是侧面 BCC_1B_1 的中心,且 $PE/\!/AB$. 设平面 EPN 交 A_1D_1 于点 F,交 AD 于点 G,交 BC 于点 H,连接 NF,GH,因为平面 $ABCD/\!/$平面 $A_1B_1C_1D_1$,所以 $GH/\!/NF$,$GH=NF$. 因为 $PE/\!/AB$,$AB\subset$平面 $ABCD$,所以 $PE/\!/$平面 $ABCD$. 又 $GH\subset$平面 $ABCD$,所以 $PE/\!/GH$,所以 $AB/\!/GH$,易知 $AB\perp HN$,所以 $GH\perp HN$,所以平面 EMN 截正方体得到的截面多边形 $NFGH$ 是矩形,A 正确;因为点 M 是正方体的中心,所以 D_1,M,B 三点共线,所以平面 AD_1M 即为平面 ABC_1D_1,因为 $BC_1\perp B_1C$,$AB\perp B_1C$,$AB\cap BC_1=B$,AB,$BC_1\subset$平面 ABC_1D_1,所以 $B_1C\perp$平面 ABC_1D_1,又 $B_1C\subset$平面 AB_1C,所以平面 $AB_1C\perp$平面 ABC_1D_1,即平面 $AB_1C\perp$平面 AD_1M,B 正确;当 $\lambda=1$ 时,点 N 与点 C_1 重合,平面 EMN 即为平面 ABC_1D_1,由 B 选项可知平面 $AB_1C\perp$平面 ABC_1D_1,即平面 $AB_1C\perp$平面 EMN,C 正确;当 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时,$C_1N=BH=\frac{2}{3}BC=\frac{4}{3}$,则 $FD_1=AG=\frac{2}{3}AD=\frac{4}{3}$,又 $GH=2$,$NH=\sqrt{2^2+\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{10}}{3}$,所以截面多边形 $NFGH$ 的面积为 $2\times\frac{2\sqrt{10}}{3}=\frac{4\sqrt{10}}{3}$,D 错误. 故选 ABC.

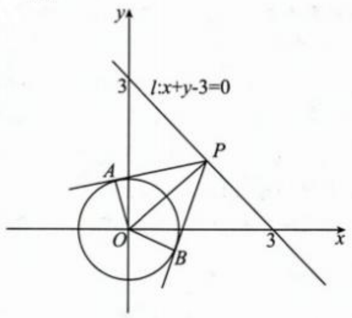


12. ABD 【解析】$\because g(x)=(x-2)f(x)$,$g(x)=g(4-x)$,$\therefore (x-2)f(x)=(2-x)f(4-x)$,$\therefore f(x)+f(4-x)=0$,$\therefore f(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称,A 正确;又 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数,$\therefore f(x)=-f(4-x)=f(x-4)$,$\therefore f(x)$ 是周期为 4 的周期函数,B 正确;$g(5)=g(4-5)=g(-1)=(-1-2)f(-1)=-3\times(-2)=6$,C 错误;$\because f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数,$\therefore f(0)=0$,$f(1)=-f(-1)=2$,$\therefore f(2)=0$,$f(3)=-f(1)=-2$,$f(4)=f(0)=0$,$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$,$\therefore \sum_{i=1}^{2\,023}f(i)=505[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(2\,021)+f(2\,022)+f(2\,023)=0+f(1)+f(2)+f(3)=0+2+0-2=0$,D 正确. 故选 ABD.

三、填空题

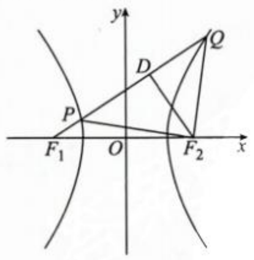
13. 3π 【解析】设圆锥的底面半径为 r,母线长为 l,则 $l^2=r^2+9$ ①,由圆锥的表面积是底面积的 3 倍,得圆锥的侧面积是底面积的 2 倍,则 $2\pi r\cdot\frac{1}{2}l=2\pi r^2$,所以 $l=2r$ ②,由①②解得 $r=\sqrt{3}$,$l=2\sqrt{3}$,所以该圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\times3\times3=3\pi$.

14. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 【解析】由题可知点 P 在圆 O 外,当 PA,PB 均与圆 O 相切时,θ 最大,则 $\frac{\theta}{2}$ 也最大,此时 $\sin\frac{\theta}{2}=\sin\angle APO=\frac{|OA|}{|OP|}=\frac{1}{|OP|}$. 要使 $\sin\frac{\theta}{2}$ 最大,则 $|OP|$ 最小,又 $|OP|$ 的最小值为点 O 到直线 l 的距离,所以 $|OP|_{\min}=\frac{|0+0-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,所以 $\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.



15. 114 【解析】将 5 名工作人员分配到 3 个会议厅,每个会议厅至少 1 人的分配方法有 $\frac{C_5^3C_2^1C_1^1}{A_2^2}\cdot A_3^3+\frac{C_5^2C_3^2C_1^1}{A_2^2}\cdot A_3^3=150$ 种,其中甲、乙两人分配到同一个会议厅的分配方法有 $C_3^1A_3^3+C_3^2A_3^3=36$ 种,所以甲、乙两人不分配到同一个会议厅的不同分配方法共有 $150-36=114$ 种.

16. $\sqrt{2}$ 【解析】依题意,由 $\left(\frac{\overrightarrow{F_2P}}{|\overrightarrow{F_2P}|}+\frac{\overrightarrow{F_2Q}}{|\overrightarrow{F_2Q}|}\right)\cdot(\overrightarrow{F_2P}-\overrightarrow{F_2Q})=0$,得 $\left(\frac{\overrightarrow{F_2P}}{|\overrightarrow{F_2P}|}+\frac{\overrightarrow{F_2Q}}{|\overrightarrow{F_2Q}|}\right)\cdot\overrightarrow{QP}=0$,即 $\angle PF_2Q$ 的平分线与直线 PQ 垂直,如图,设 $\angle PF_2Q$ 的平分线 F_2D 与直线 PQ 交于点 D,则 $\angle PF_2D=\angle QF_2D$,$\angle F_2DP=\angle F_2DQ=90°$,又 $|DF_2|=|DF_2|$,所以 $\triangle PDF_2\cong\triangle QDF_2$,所以 $|PD|=|QD|$,$|PF_2|=|QF_2|$.



由题得 $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,设 $|DF_2|=h$,$|QF_2|=s$,$|PF_1|=t$,在 $\mathrm{Rt}\triangle DF_1F_2$ 中,$\angle F_1DF_2=90°$,$\angle DF_1F_2=30°$,则 $h=c$,$|DF_1|=\sqrt{3}c$,由双曲线的性质可得 $\begin{cases}|QF_1|-|QF_2|=|PQ|+t-s=2a\\|PF_2|-|PF_1|=s-t=2a\end{cases}$,解得 $|PQ|=4a$,则 $|PD|=|QD|=2a$,所以在 $\mathrm{Rt}\triangle QDF_2$ 中,$s=\sqrt{c^2+(2a)^2}$,又 $t=|DF_1|-|PD|=\sqrt{3}c-2a$,$s-t=2a$,所以 $\sqrt{c^2+(2a)^2}-(\sqrt{3}c-2a)=2a$,即 $\sqrt{c^2+(2a)^2}=\sqrt{3}c$,整理得 $2a^2=c^2$,所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$.

四、解答题

17. **解**:(1)由 $\frac{S_n+S_{n+1}+3}{a_{n+1}}=2$,

得 $a_{n+1}\neq0$,且 $S_n+S_{n+1}=2a_{n+1}-3$,(ⅰ)

所以当 $n\geqslant2$ 时,$S_{n-1}+S_n=2a_n-3$,(ⅱ)

(ⅰ)-(ⅱ),得 $a_{n+1}+a_n=2a_{n+1}-2a_n$,

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=3(n\geqslant2)$. (3 分)

当 $n=1$ 时,$S_1+S_2=2a_2-3$,

即 $a_1+a_1+a_2=2a_2-3$,

又 $a_1=3$,所以 $a_2=9$,

所以 $\frac{a_2}{a_1}=3$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为首项,3 为公比的等比数列,

所以 $a_n=3\times3^{n-1}=3^n$. (5 分)

(2)若选①:$b_n=na_n=n\cdot3^n$,

则 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1\cdot3+2\cdot3^2+3\cdot3^3+\cdots+n\cdot3^n$,

所以 $3T_n=1\cdot3^2+2\cdot3^3+\cdots+(n-1)\cdot3^n+n\cdot3^{n+1}$, (8 分)

所以 $-2T_n=3+3^2+3^3+\cdots+3^n-n\cdot3^{n+1}$

$=\frac{3(1-3^n)}{1-3}-n\cdot3^{n+1}=\left(\frac{1}{2}-n\right)\cdot3^{n+1}-\frac{3}{2}$,

所以 $T_n=\left(\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}\right)\cdot3^{n+1}+\frac{3}{4}$. (10 分)

若选②:$b_n=\frac{2n+3}{(n^2+n)a_{n+1}}=\frac{2n+3}{n(n+1)\cdot3^{n+1}}=\frac{1}{n\cdot3^n}-\frac{1}{(n+1)\cdot3^{n+1}}$, (8 分)

则 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2\cdot3^2}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3^2}-\frac{1}{3\cdot3^3}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{n\cdot3^n}-\frac{1}{(n+1)\cdot3^{n+1}}\right]$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{(n+1)\cdot3^{n+1}}$. (10 分)

若选③:因为 $a_n=3^n$,

所以 $b_n=(-1)^{n-1}a_na_{n+1}=(-1)^{n-1}3^n\cdot3^{n+1}=(-1)^{n-1}3^{2n+1}=27(-9)^{n-1}$, (8 分)

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 27 为首项,-9 为公比的等比数列,

所以 $T_n=\frac{27[1-(-9)^n]}{1+9}=\frac{27-(-1)^n3^{2n+3}}{10}$. (10 分)

18. **解**:(1)由正弦定理及 $\frac{b\sin C}{\sin A+\sin B-\sin C}=a-b+c$,

得 $\frac{bc}{a+b-c}=a-b+c$,

所以 $bc=(a+b-c)(a-b+c)=a^2-(b-c)^2=2bc-(b^2+c^2-a^2)=2bc-2bc\cos A$,

即 $2bc\cos A=bc$,

所以 $\cos A=\frac{1}{2}$,

又 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $A=\frac{\pi}{3}$. (4 分)

因为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径 $R=\sqrt{3}$,

所以 $a=2R\sin A=3$. (5 分)

(2)设 $AP=t$,$t>0$,

由 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BP}$,得点 P 为 BC 边的中点,

所以 $2\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,

两边同时平方,

得 $4\overrightarrow{AP}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A$，

即 $4t^2=c^2+b^2+bc$， ①

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-bc$， ②

①－②，得 $4t^2-a^2=2bc$，

所以 $t^2=\frac{9}{4}+\frac{bc}{2}$. （7分）

由正弦定理得 $b=2\sqrt{3}\sin B$，$c=2\sqrt{3}\sin C$，

所以 $bc=12\sin B\sin C$，

所以 $t^2=\frac{9}{4}+6\sin B\sin C=\frac{9}{4}+3[\cos(B-C)-\cos(B+C)]=\frac{15}{4}+3\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2C\right)$. （9分）

因为△ABC为锐角三角形，

所以 $0<B<\frac{\pi}{2}$，$0<C<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}$， （10分）

所以 $-\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}-2C<\frac{\pi}{3}$，

所以 $\frac{1}{2}<\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2C\right)\leqslant 1$，

所以 $\frac{21}{4}<t^2\leqslant\frac{27}{4}$，

所以 $\frac{\sqrt{21}}{2}<t\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

即线段 AP 长度的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{21}}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$. （12分）

19. **解**：(1)取 B_1C 的中点 N，连接 MN，DN，

因为点 D，N 分别是棱 B_1C_1，B_1C 的中点，

所以 $DN/\!/CC_1$，$DN=\frac{1}{2}CC_1=\frac{1}{2}AA_1$，

又 $AA_1/\!/CC_1$，

所以 $DN/\!/A_1M$，

所以由 DN，A_1M 可确定平面 A_1MND. （2分）

因为 $A_1D/\!/$平面 B_1CM，平面 $B_1CM\cap$平面 $A_1MND=MN$，

所以 $A_1D/\!/MN$，

所以四边形 A_1MND 为平行四边形，

所以 $A_1M=DN=\frac{1}{2}AA_1=2$，

所以 $AM=A_1M=2$. （5分）

(2)连接 AE，

因为 $A_1E\perp$平面 ABC，AE，$BC\subset$平面 ABC，

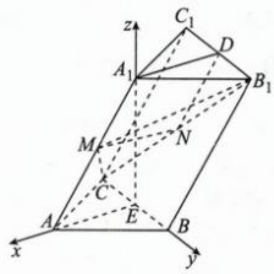
所以 $A_1E\perp AE$，$A_1E\perp BC$，

因为 $AC=AB$，点 E 为 BC 的中点，

所以 $AE\perp BC$，

所以 AE，A_1E，BC 两两垂直. （6分）

以 E 为坐标原点，$\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{EA_1}$ 所在方向分别为 x，y，z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $E(0,0,0)$，$A(\sqrt{2},0,0)$，$B(0,\sqrt{2},0)$，$C(0,-\sqrt{2},0)$，

所以 $\overrightarrow{EB}=(0,\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{BC}=(0,-2\sqrt{2},0)$. （7分）

因为 $AA_1=4$，$AE=\sqrt{2}$，

所以 $A_1E=\sqrt{14}$，

则 $A_1(0,0,\sqrt{14})$，$M\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{AA_1}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{14})$，

因为 $\overrightarrow{EB_1}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{AA_1}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{14})$，

所以 $B_1(-\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{14})$，

所以 $\overrightarrow{B_1M}=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BB_1}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{14})$. （9分）

设平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}=-2\sqrt{2}b=0\\ \overrightarrow{BB_1}\cdot\boldsymbol{n}=-\sqrt{2}a+\sqrt{14}c=0\end{cases}$，

取 $a=\sqrt{7}$，则 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{7},0,1)$， （10分）

设直线 B_1M 与平面 BCC_1B_1 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{B_1M},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{B_1M}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{B_1M}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{70}}{20}$，

所以直线 B_1M 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{70}}{20}$. （12分）

20. **解**：(1)由题意得 $\bar{x}=\frac{8+9+11+12+15}{5}=11$，

$\bar{y}=\frac{67+63+80+80+85}{5}=75$，

又 $\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=4\ 218$，$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=635$，

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\frac{4\ 218-4\ 125}{635-605}=\frac{93}{30}=3.1$，

所以 $\hat{a}=75-3.1\times 11=40.9$，

所以经验回归方程为 $\hat{y}=3.1x+40.9$. （4分）

(2)根据题意得 $40\times 100\times\hat{y}=4\ 000(3.1x+40.9)>$

600 000,

解得 $x>\frac{1\,091}{31}\approx35.2$,

又 $\frac{35.2}{4}=8.8$,

所以至少要请 9 位主播进行直播. (6 分)

(3)由 $\frac{1}{2}m+\frac{1}{4}m+\frac{1}{8}m+\frac{9}{16}=1$,解得 $m=\frac{1}{2}$. (7 分)

设采用甲款包装箱获得的利润的数学期望为 E_1,

则 $E_1=40-E(X)-t=40-1\times\left[0\times\frac{1}{32}+1\times\frac{1}{2}+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+5\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]-t=\frac{1\,223}{32}-t$;

设采用乙款包装箱获得的利润的数学期望为 E_2,

则 $E_2=40-E(Y)-\frac{3}{2}t=40-0\times\frac{9}{16}-\frac{1}{2}\times\left(1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{8}\right)-\frac{3}{2}t=\frac{629}{16}-\frac{3}{2}t$. (9 分)

令 $\frac{1\,223}{32}-t=\frac{629}{16}-\frac{3}{2}t$,解得 $t=\frac{35}{16}$.

因为 $1\leqslant t\leqslant5$,

所以令 $\frac{1\,223}{32}-t>\frac{629}{16}-\frac{3}{2}t$,解得 $t\in\left(\frac{35}{16},5\right]$;

令 $\frac{1\,223}{32}-t<\frac{629}{16}-\frac{3}{2}t$,解得 $t\in\left[1,\frac{35}{16}\right)$. (11 分)

综上所述,当 $t=\frac{35}{16}$ 时,采用两款包装箱获得的利润一样;

当 $t\in\left(\frac{35}{16},5\right]$ 时,采用甲款包装箱获得的利润更大;

当 $t\in\left[1,\frac{35}{16}\right)$ 时,采用乙款包装箱获得的利润更大. (12 分)

21. **解**:(1)因为 $f(x)=mx^2-e^x$,

所以 $f'(x)=2mx-e^x$.

令 $g(x)=f'(x)$,则 $g'(x)=2m-e^x$,

当 $m\leqslant0$ 时,$g'(x)<0$,$f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减; (2 分)

当 $m>0$ 时,由 $g'(x)=0$,得 $x=\ln(2m)$,

则当 $x<\ln(2m)$ 时,$g'(x)>0$;当 $x>\ln(2m)$ 时,$g'(x)<0$,

所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,\ln(2m))$ 上单调递增,在 $(\ln(2m),+\infty)$ 上单调递减. (4 分)

综上所述,当 $m\leqslant0$ 时,$f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减;

当 $m>0$ 时,$f'(x)$ 在 $(-\infty,\ln(2m))$ 上单调递增,在 $(\ln(2m),+\infty)$ 上单调递减. (5 分)

(2)由 $\frac{f(x)}{x}\leqslant m\ln x$,得 $\frac{e^x}{x}-m(x-\ln x)\geqslant0$,

即 $e^{x-\ln x}-m(x-\ln x)\geqslant0$ 对任意的 $x>0$ 恒成立, (6 分)

令 $F(x)=x-\ln x$,则 $F'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$,

所以当 $0<x<1$ 时,$F'(x)<0$,$F(x)$ 单调递减;

当 $x>1$ 时,$F'(x)>0$,$F(x)$ 单调递增,

所以 $F(x)\geqslant F(1)=1$. (8 分)

令 $t=x-\ln x$,则 $t\in[1,+\infty)$,

则 $e^{x-\ln x}-m(x-\ln x)\geqslant0$ 对任意的 $x>0$ 恒成立,

等价于 $e^t-mt\geqslant0$ 对任意的 $t\geqslant1$ 恒成立,

等价于 $m\leqslant\frac{e^t}{t}$ 对任意的 $t\geqslant1$ 恒成立,即 $m\leqslant\left(\frac{e^t}{t}\right)_{\min}$. (9 分)

令 $h(t)=\frac{e^t}{t}(t\geqslant1)$,

则 $h'(t)=\frac{te^t-e^t}{t^2}=\frac{e^t(t-1)}{t^2}\geqslant0$,

所以 $h(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $h(t)\geqslant h(1)=e$,

所以 $m\leqslant e$,

所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty,e]$. (12 分)

22. **解**:(1)由题意知 $P\left(-\frac{1}{2},0\right)$,

设点 $A(x_0,y_0)$,

因为点 A 是线段 PB 的中点,

所以 $B\left(2x_0+\frac{1}{2},2y_0\right)$.

又点 A,B 都在抛物线 C 上,

所以 $\begin{cases}y_0^2=2x_0\\4y_0^2=2\left(2x_0+\frac{1}{2}\right)\end{cases}$,

解得 $x_0=\frac{1}{4}$,$y_0=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以点 A 的坐标为 $\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. (3 分)

(2)由题意可知直线 AB 的斜率存在且不为 0,

设直线 AB 的方程为 $y=k\left(x+\frac{1}{2}\right)$,$k\neq0$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

由点 A 在点 B 的左侧,则 $0<x_1<x_2$,

设 $D(x_3,y_3)$,直线 BD 与 x 轴交于点 E,

联立 $\begin{cases}y=k\left(x+\frac{1}{2}\right)\\y^2=2x\end{cases}$,得 $k^2x^2+(k^2-2)x+\frac{k^2}{4}=0$,

由 $\Delta=(k^2-2)^2-k^4=4-4k^2>0$,得 $-1<k<1$,$k\neq0$,

$x_1+x_2=\frac{2-k^2}{k^2}$,$x_1x_2=\frac{1}{4}$, (5 分)

所以 $0<x_1<\frac{1}{2}<x_2$,

所以直线 AF 的斜率存在,

由题可得 $F\left(\frac{1}{2},0\right)$，

所以直线 AF 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1-\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)$，

与 $y^2=2x$ 联立得，$y_1^2x^2-\left(y_1^2+2x_1^2-2x_1+\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{4}y_1^2=0$，

化简得 $2x_1x^2-\left(2x_1^2+\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{2}x_1=0$，

解得 $x=\frac{1}{4x_1}$ 或 $x=x_1$，

因为直线 AF 的斜率存在，

所以 $x_3=\frac{1}{4x_1}=x_2$，

所以 $BD\perp x$ 轴.　　(7分)

所以 $S_{\triangle BDP}=\frac{1}{2}\left(x_2+\frac{1}{2}\right)\cdot 2|y_2|$，

$\triangle BDP$ 的周长为 $2\sqrt{\left(x_2+\frac{1}{2}\right)^2+y_2^2}+2|y_2|$，

所以 $S_{\triangle BDP}=\frac{1}{2}\left[2\sqrt{\left(x_2+\frac{1}{2}\right)^2+y_2^2}+2|y_2|\right]r$

$=\frac{1}{2}\left(x_2+\frac{1}{2}\right)|2y_2|$，

所以 $r=\frac{\left(x_2+\frac{1}{2}\right)|y_2|}{|y_2|+\sqrt{\left(x_2+\frac{1}{2}\right)^2+y_2^2}}$

$=\frac{1}{\frac{1}{x_2+\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{y_2^2}+\frac{1}{\left(x_2+\frac{1}{2}\right)^2}}}$

$=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2x_2}+\frac{1}{\left(x_2+\frac{1}{2}\right)^2}}+\frac{1}{x_2+\frac{1}{2}}}$.　　(9分)

令 $t=x_2+\frac{1}{2}$，则 $r=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2t-1}+\frac{1}{t^2}}+\frac{1}{t}}$，$t>1$，

因为 $y=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$，$y=\frac{1}{2x-1}$，$y=\frac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上均单调递减，

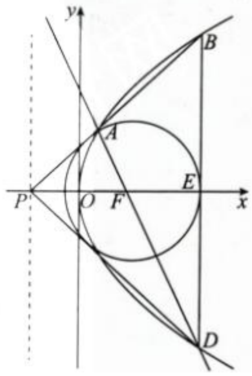
所以 $y=\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{x^2}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

则 $y=\sqrt{\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $r=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2t-1}+\frac{1}{t^2}}+\frac{1}{t}}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $r>\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$，

所以 r 的取值范围为 $(\sqrt{2}-1,+\infty)$.　　(12分)



2023 年普通高等学校招生考试模拟试题

压轴卷·数学(一)

命题要素一览表

注:

1. 能力要求:

Ⅰ.抽象概括能力　Ⅱ.推理论证能力　Ⅲ.运算求解能力　Ⅳ.空间想象能力　Ⅴ.数据处理能力　Ⅵ.应用意识和创新意识

2. 核心素养:

①数学抽象　②逻辑推理　③数学建模　④直观想象　⑤数学运算　⑥数据分析

题号	题型	分值	知识点（主题内容）	能力要求						核心素养						预估难度	
				Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	①	②	③	④	⑤	⑥	档次	系数
1	选择题	5	复数的运算,求复数的虚部		√	√					√			√		易	0.80
2	选择题	5	由集合运算求参数取值范围		√	√					√			√		易	0.78
3	选择题	5	同角三角函数关系,和角公式		√	√					√			√		易	0.74
4	选择题	5	与等差数列有关的数学文化题	√	√	√			√	√	√	√		√		易	0.72
5	选择题	5	平面向量基本定理		√	√					√		√	√		中	0.62
6	选择题	5	椭圆的定义及简单性质	√	√	√			√	√	√			√		中	0.55
7	选择题	5	由三角函数性质求参		√	√			√		√			√		中	0.50
8	选择题	5	利用导数比较大小	√	√	√			√	√	√			√		中	0.40
9	选择题	5	统计图		√	√		√	√		√	√	√	√	√	中	0.65
10	选择题	5	二项式定理		√	√					√			√		中	0.50
11	选择题	5	正方体中的截面问题	√	√	√	√		√	√	√		√	√		中	0.35
12	选择题	5	函数的周期性与对称性	√	√	√			√	√	√			√		难	0.28
13	填空题	5	利用圆锥的表面积求体积	√	√	√	√			√	√			√		易	0.75
14	填空题	5	与圆有关的新定义问题,求最值	√	√	√			√	√	√		√	√		中	0.68
15	填空题	5	排列组合的应用	√	√	√		√	√	√	√			√	√	中	0.55
16	填空题	5	求双曲线的离心率	√	√	√			√	√	√		√	√		难	0.26
17	解答题	10	等比数列的判定,求数列的通项公式,前 n 项和		√	√			√		√			√	√	中	0.65
18	解答题	12	利用正、余弦定理解三角形,求线段长度的取值范围	√	√	√			√	√	√			√		中	0.60
19	解答题	12	由平行关系求线段的长,求线面角的正弦值		√	√	√	√	√		√		√	√	√	中	0.55

20	解答题	12	回归分析，利用数学期望进行方案选择	√	√	√		√	√	√	√	√	√	√	√	中	0.50
21	解答题	12	讨论函数的单调性，由不等式恒成立求参数取值范围	√	√	√		√	√	√	√			√	√	难	0.22
22	解答题	12	直线与抛物线的位置关系	√	√	√		√	√	√	√		√	√	√	难	0.15