2022学年第二学期温州十校联合体期末联考

高二年级数学学科参考答案

一．选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. C　2. B　3. D　4. A　5. D　6. C　7. C　8. D

二．选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

9. AC　10. BCD　11. ABD　12. ACD

三．填空题（本大题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分）

13. $\sqrt{13}$　14. $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}+2$　15. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　16. 4962

四．解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（1）证明：$\because ABCD-A'B'C'D'$ 是正方体，

$\therefore AA'\perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore AA'\perp BD$.　　---1 分

又 $BD\perp AC$，　　---1 分

$AA'\cap AC$　　---1 分

$\therefore BD\perp$ 平面 $ACC'A'$　　---1 分

$BD\subset$ 平面 $A'BD$

$\therefore$ 平面 $A'BD\perp$ 平面 $ACC'A'$.　　-----1 分

（2）正确建系　　---1 分

设平面 AB_1E 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

$\overrightarrow{AB_1}=(0,1,1),\overrightarrow{AE}=(-1,0,\frac{1}{2}),\overrightarrow{AA_1}=(0,0,1)$.

$$由\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=y+z=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=-x+\frac{1}{2}z=0,\end{cases}$$

令 $z=2$，则 $y=-2,x=1$，即 $\vec{n}=(1,-2,2)$.　　---2 分

设求 A_1 到平面 AB_1E 的距离为 d，

则 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{AA_1}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{2}{3}$，即点 A_1 到平面 AB_1E 的距离为 $\dfrac{2}{3}$. -----2 分

说明：如果用等积法，列出等积公式 1 分，计算面积 2 和高 1 分，结论 1 分。

18.解：（1）设等差数列公差为 d，得 $\begin{cases}a_3=-10\\ a_2{}^2=a_1a_5\end{cases}$ ....1 分

$\Rightarrow\begin{cases}a_1+2d=-10\\ d=2a_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=-2\\ d=-4\end{cases}$， ....2 分

所以 $a_n=-4n+2$ ....1 分

（2）

$b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{(-4n+2)(-4n-2)}=\dfrac{1}{(4n-2)(4n+2)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4n-2}-\dfrac{1}{4n+2}\right)$， ……2 分

$S_n=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{10}+\cdots+\dfrac{1}{4n-2}-\dfrac{1}{4n+2}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4n+2}\right)=\dfrac{n}{8n+4}$， ......2 分

$2S_n\le\dfrac{n}{3}-1\Rightarrow 4n^2-13n-6\ge0\Rightarrow n\ge\dfrac{13+\sqrt{265}}{8}$ ....2 分

由 $\dfrac{13+\sqrt{265}}{8}\in(3,4)$ 且 $n\in N^*$，得最小正整数为 4............2 分

19.解：（1）由题意，$A=\dfrac{\pi}{6}$，由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得 $b^2+c^2-\sqrt{3}bc=4$ ……2 分（能写出余弦定理得 1 分）

由 $\begin{cases}b^2+c^2-\sqrt{3}bc=4\\ b=\sqrt{3}c\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=2\sqrt{3}\\ c=2\end{cases}$ ……1 分

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}$ ……1 分

$\therefore$ 内切圆半径 $r=\dfrac{2S}{a+b+c}=2\sqrt{3}-3$ ……2 分（能写出 $S=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\cdot r$ 得 1 分）

（2）解一：由已知有 $a=2$ ……①

由 $\sin B=2\sin C$ 可得 $b=2c$ ……②，……1 分

由 $A=2C$ 得 $\sin A=\sin 2C$

$\therefore \sin A = 2\sin C\cos C \Rightarrow a = 2c\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \Rightarrow a^2b = c(a^2+b^2-c^2)$ ……③……2 分

由①②③可解得 $a=2, b=\dfrac{4}{\sqrt{3}}, c=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ……1 分

可得 $B=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}ac = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ……2 分

解二：由 $A=2C, \sin B=\sin(A+C)=\sin 3C = 2\sin C$ ……1 分

$\sin(2C+C)=2\sin C \Rightarrow \sin 2C\cos C+\cos 2C\sin C = 2\sin C \Rightarrow 2\sin C\cos^2 C+\cos 2C\sin C = 2\sin C$

$\Rightarrow 2\cos^2 C+\cos 2C = 2 \Rightarrow 2\cos^2 C + 2\cos^2 C - 1 = 2 \Rightarrow \cos^2 C = \dfrac{3}{4}$ ……2 分

由 $A=2C$ 得 C 为锐角，$\therefore \cos C = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow C=\dfrac{\pi}{6}, A=\dfrac{\pi}{3}, B=\dfrac{\pi}{2}$ ……1 分

$\therefore b=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ……2 分

20. 解：（1）由题意 ξ 的取值为 0,1,2

$P(\xi=0)=\dfrac{C_{43}^2}{C_{50}^2}=\dfrac{129}{175}$，$P(\xi=1)=\dfrac{C_7^1C_{43}^1}{C_{50}^2}=\dfrac{43}{175}$，$P(\xi=2)=\dfrac{C_7^2}{C_{50}^2}=\dfrac{3}{175}$ ……3 分

分布列为

ξ	0	1	2
P	$\dfrac{129}{175}$	$\dfrac{43}{175}$	$\dfrac{3}{175}$

……1 分

$E(\xi)=1\times\dfrac{43}{175}+2\times\dfrac{3}{175}=\dfrac{7}{25}$ ……2 分

（2）设 $f(N)=P(x=5)=\dfrac{C_{50}^5C_{N-50}^{15}}{C_N^{20}}$ ……1 分

$\frac{f(N+1)}{f(N)}=\frac{(N-49)(N-19)}{(N-64)(N+1)}=\frac{N^2-68N+931}{N^2-63N-64}$ ……2 分

$(N^2-68N+931)-(N^2-63N-64)=-5N+995$

所以 $N=199$ 时，$f(N+1)=f(N)$

$N>199$ 时，$f(N+1)<f(N)$，$N<199$ 时，$f(N+1)>f(N)$ ……2 分

所以当 $N=199$ 或 200 时，$P(x=5)$ 最大，估计蟹池中青蟹数目为 199 或 200 只……1 分

21.解：（1）当 $k=2$ 时，$f\left(x\right)=x\ln x+1$，$f'\left(x\right)=\ln x+1$，..........................1 分

可知 $f'\left(e\right)=2$，$f\left(e\right)=e+1$，..........................1 分

故切线方程为 $y-(e+1)=2(x-e)$ 即 $y=2x-e+1$ ....2 分

（2）若 $x>2$,总有 $f\left(x\right)>0$，即 $x\ln x+(2-k)x+2k-3>0$，

得 $k<\frac{x\ln x+2x-3}{x-2},\forall x>2$ 恒成立，即 $k<\left(\frac{x\ln x+2x-3}{x-2}\right)_{\min}$ ....2 分

设 $g(x)=\frac{x\ln x+2x-3}{x-2}$ ，$g'(x)=\frac{-2\ln x+x-3}{\left(x-2\right)^2}$，设 $t(x)=-2\ln x+x-3$，

$t'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}>0$，$t(x)$ 单调递增，可知 $t(6)<0$，$t(7)>0$，令 $t(x_0)=0$，

$x_0\in\left(6,7\right)$ 且 $2\ln x_0=x_0-3$，..2 分

可知当 $x\in\left(2,x_0\right)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，故 $g(x)_{\min}=g(x_0)=\frac{x_0\ln x_0+2x_0-3}{x_0-2}$ ....2 分

$=\frac{2x_0\ln x_0+4x_0-6}{2x_0-4}=\frac{{x_0}^2+x_0-6}{2x_0-4}=\frac{1}{2}\bullet\frac{{x_0}^2+x_0-6}{x_0-2}=\frac{1}{2}\left(x_0+3\right)\in\left(\frac{9}{2},5\right)$，故 k 的最大值为 4..2 分

22.解：（1）设直线 l 的方程为 $y=x+t$，代入抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$，

可得 $x^2-2px-2pt=0$，   -----1 分

设 $S(x_1,y_1),T(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=2p$ -----------1 分

点$M(2,3)$为线段PT的中点，可得$2p=4$,即$p=2$

则抛物线的方程为$x^2=4y$；　　　　------------1 分

（2）①设 $A(x_1,\frac{x_1{}^2}{4}),B(x_2,\frac{x_2{}^2}{4})$，

由 $x^2=4y$，可得 $y=\frac{1}{4}x^2$，则 $y'=\frac{1}{2}x$，　　　　-----1 分

所以 A，B 两点处的切线斜率分别为 $k_1=\frac{1}{2}x_1$，$k_2=\frac{1}{2}x_2$，

由 $\begin{cases} y=kx+1 \\ x^2=4y \end{cases}$，得 $x^2-4kx-4=0$，所以 $x_1+x_2=4k,x_1x_2=-4$，

所以 $k_1k_2=\frac{1}{4}x_1x_2=-1$，

所以 $PA\perp PB$，即 ΔPAB 为直角三角形.　　　　-------- 2 分

②由（1）知 $l_{PA}:y=\frac{1}{2}x_1x-\frac{1}{4}x_1^2$，即：$y=\frac{1}{2}x_1x-y_1$，同理 $l_{PB}:y=\frac{1}{2}x_2x-y_2$，由直线 PA，PB 都过点 $P(x_0,y_0)$，即 $\begin{cases} y_0=\frac{1}{2}x_0x_1-y_1 \\ y_0=\frac{1}{2}x_0x_2-y_2 \end{cases}$，则点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 的坐标都满足方程 $\frac{1}{2}x_0x-y=y_0$，　　　　----2 分

即直线 AB 的方程为：$\frac{1}{2}x_0x-y=y_0$，又由直线 AB 过点 $F(0,1)$，$\therefore y_0=-1$，

联立 $\begin{cases} \frac{1}{2}x_0x-y=-1 \\ x^2=4y \end{cases}$ 得 $x^2-2x_0x-4=0$，

$\therefore |AB|=\sqrt{1+\frac{x_0^2}{4}}|x_1-x_2|=\sqrt{1+\frac{x_0^2}{4}}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+\frac{x_0^2}{4}}\sqrt{(2x_0)^2+16}$，

点 $P(x_0,-1)$ 到直线 AB 的距离 $d=\frac{\left|\frac{1}{2}x_0^2+2\right|}{\sqrt{1+\frac{x_0^2}{4}}}$，　　　　----2 分

$$\therefore S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d \quad =\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{x_0^2}{4}}\cdot\sqrt{(2x_0)^2+16}\cdot\frac{\left|\frac{1}{2}x_0^2+2\right|}{\sqrt{1+\frac{x_0^2}{4}}} \quad =\frac{1}{2}\sqrt{\left(x_0^2+4\right)^3}$$

$$\therefore S_{\Delta APB}\geq\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}=4$$

当且仅当$x_0=0$时，$S_{\Delta APB}$有最小值4，此时P（$0,-1$） ------2 分