2023年普通高等学校招生全国统一考试(模拟)

数　学

2023.2

注意事项:

1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2.回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合$A=\{x|(\frac{1}{2})^x<1\}$,$B=\{x|\ln x>0\}$,则下列集合为空集的是

A.$A\cap(\complement_R B)$　　B.$(\complement_R A)\cap B$　　C.$A\cap B$　　D.$(\complement_R A)\cap(\complement_R B)$

2.在复平面内,复数z_1,z_2对应的点分别是$(2,-1)$,$(1,-3)$,则$\frac{z_2}{z_1}$的虚部是

A.i　　B.$-$i　　C.1　　D.-1

3.某工厂随机抽取20名工人,对他们某天生产的产品件数进行统计,数据如下表,则该组数据的第75百分位数是

件数	7	8	9	10	11
人数	3	7	5	4	1

A.8.5　　B.9　　C.9.5　　D.10

4.已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$,且$\boldsymbol{b}=(-3,4)$,则$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影向量为

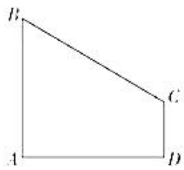
A.$(-6,8)$　　B.$(6,-8)$　　C.$(-\frac{6}{5},\frac{8}{5})$　　D.$(\frac{6}{5},-\frac{8}{5})$

5."$\theta=k\pi\pm\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$"是"$\theta=\frac{k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$"的

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

6.古希腊亚历山大时期的数学家帕普斯在《数学汇编》第3卷中记载着一个确定重心的定理:"如果同一平面内的一个闭合图形的内部与一条直线不相交,那么该闭合图形围绕这



条直线旋转一周所得到的旋转体的体积等于闭合图形面积乘以该闭合图形的重心旋转所得周长的积”，即 $V=sl$（V 表示平面图形绕旋转轴旋转的体积，s 表示平面图形的面积，l 表示重心绕旋转轴旋转一周的周长）. 如图，直角梯形 $ABCD$，已知 $AB/\!/DC$，$AB\perp AD$，$AB=3CD$，$AD=3$，则其重心 G 到 AB 的距离为

A. $\frac{7}{4}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{5}{4}$　　D. 1

7. 已知 $x=(\frac{1}{2})^{x}$，$\log_{\frac{1}{2}}y=\sqrt{x}$，$x=\log_{3}z$，则

A. $x<y<z$　　B. $y<x<z$　　C. $z<x<y$　　D. $z<y<x$

8. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线与 C 的左、右两支分别交于点 M，N，且 $|F_1M|:|F_2N|:|MN|=1:3:4$，则 C 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{21}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{21}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{14}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{14}}{2}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知 $f(x)=x^3g(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，则函数 $g(x)$ 的解析式可以为

A. $g(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$　　B. $g(x)=3^x-3^{-x}$

C. $g(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x+1}$　　D. $g(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$

10. 已知圆 $C:x^2+y^2-6x+8=0$，点 $A(0,4)$，点 P 在圆 C 上，O 为坐标原点，则

A. 线段 AP 长的最大值为 6

B. 当直线 AP 与圆 C 相切时，$|AP|=2\sqrt{6}$

C. 以线段 AP 为直径的圆不可能过原点 O

D. $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的最大值为 20

11. 抛物线有如下光学性质：由其焦点射出的光线经抛物线反射后，沿平行于抛物线对称轴的方向射出. 反之，平行于抛物线对称轴的入射光线经抛物线反射后必过抛物线的焦点. 已知抛物线 $C:y^2=2x$，O 为坐标原点，一束平行于 x 轴的光线 l_1 从点 $P(m,2)$ 射入，经过 C 上的点 $A(x_1,y_1)$ 反射后，再经过 C 上另一点 $B(x_2,y_2)$ 反射后，沿直线 l_2 射出，经过点 Q，则

A. $x_1x_2=\frac{1}{4}$

B. 延长 AO 交直线 $x=-\frac{1}{2}$ 于点 D，则 D,B,Q 三点共线

C. $|AB|=\frac{13}{4}$

D. 若 PB 平分 $\angle ABQ$，则 $m=\frac{9}{4}$

12. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，点 E,F,G,M 分别是 BC,AA_1,C_1D_1,BB_1 的中点，则

A. 直线 A_1G,EF 是异面直线

B. 平面 DMC_1 截正方体所得截面的面积为 $12\sqrt{2}$

C. 三棱锥 $A-MC_1D_1$ 的体积为 $\frac{16}{3}$

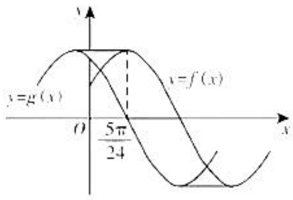
D. 三棱锥 $A-BMC_1$ 的外接球的表面积为 56π

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 某杂交水稻种植研究所调查某地水稻的株高时，发现株高（单位：cm）服从正态分布 $N(100,10^2)$，若测量 10000 株水稻，株高在 $(80,90)$ 的约有________.（若 $x\sim N(\mu,\sigma^2)$，$P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu-\sigma)\approx0.6827$，$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu-2\sigma)\approx0.9545$）

14. $(x^2+1)(2x-\frac{1}{x})^6$ 的展开式中常数项为________.

15. 将函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的图象向左平移 θ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象，如图所示，图中阴影部分的面积为 $\frac{\pi}{2}$，则 $\varphi=$________.



16. 已知 x_0 是函数 $f(x)=a+2b\sqrt{x}+e^{\frac{x}{2}}$ 的一个零点，且 $x_0\in[1,e]$，则 a^2+b^2 的最小值为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $a\cos B+b\cos A=2c\cos C$.

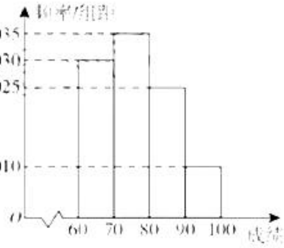
(1) 求 C；

(2) 若 $c=1$，求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

18.（12 分）

为庆祝神舟十四号载人飞船返回舱成功着陆，某学校开展了航天知识竞赛活动，已知所有学生的成绩均位于区间 $[60,100]$，从中随机抽取 1000 名学生的竞赛成绩作为样本，绘

制如图所示的频率分布直方图.



(1)若此次活动中获奖的学生占参赛总人数30%，试估计获奖分数线；

(2)采用比例分配分层随机抽样的方法，从成绩不低于80的学生中随机抽取7人，再从这7人中随机抽取2人，记成绩在[90,100]的人数为ξ，求ξ的分布列和数学期望.

19.(12分)

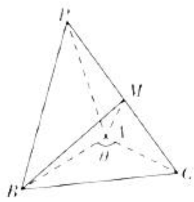
已知数列$\{a_n\}$为等比数列，$a_1=1$，a_3+1是a_2与a_4的等差中项，S_n为$\{a_n\}$的前n项和.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式及S_n；

(2)集合A为正整数集的某一子集，对于正整数k，若存在正整数m，使得$\log_2 a_k=S_m$，则$k\in A$，否则$k\notin A$.记数列$\{b_n\}$满足$b_n=\begin{cases}\log_2 a_n, n\notin A,\\ -1, n\in A,\end{cases}$求$\{b_n\}$的前20项和$T_{20}$.

20.(12分)

如图，三棱锥$P-ABC$，$PA=PB=3$，$AB=AC=4$，$\angle BAC=\theta(0<\theta<\pi)$，平面$PAB\perp$平面$ABC$，点$M$为$PC$的中点.



(1)若$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，求直线BM与平面ABC所成角的正弦值；

(2)若$AM\perp AB$，求BC的长.

21.(12分)

已知动点$M(x,y)$与点$F(1,0)$的距离和它到直线$x=4$的距离之比是$\dfrac{1}{2}$，点M的轨迹为曲线C.

(1)求C的方程；

(2)若点A,B,D,E在C上，且$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DE}$，$AD$与$BE$交于点$P$，点$P$在椭圆$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1$上，证明：$\triangle PAB$的面积为定值.

22.(12分)

已知函数$f(x)=\ln x$，$g(x)=x^2-x+2$.

(1)若$ae^x+\ln a\geqslant f(x)$恒成立，求实数a的最小值；

(2)证明：有且只有两条直线与函数$f(x)$，$g(x)$的图象都相切.

2023 年普通高等学校招生全国统一考试(模拟)

数学试题参考答案及评分标准

2023.2

说明:

一、本解答只给出了一种解法供参考,如考生的解法与本解答不同,可根据试题的主要考查内容参照评分标准酌情赋分.

二、当考生的解答在某一步出错误时,如果后继部分的解答未改该题的内容与难度,可视影响的程度决定后继部分的给分,但不得超过该部分正确答案应得分数一半;如果后继部分的解答有较严重的错误或又出现错误,就不再给分.

三、解答右端所注分数,表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四、只给整数分数,选择题和填空题不给中间分.

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.B 2.D 3.C 4.C 5.A 6.C 7.B 8.D

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9.BD 10.ABD 11.AB 12.ACD

三、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13.1359 14.-100 15.$\frac{\pi}{12}$ 16.$\frac{e}{5}$

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.解:(1)由正弦定理得:$\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin C\cos C$, ………… 2 分

所以 $\sin(A+B)=2\sin C\cos C$,即 $\sin(\pi-C)=2\sin C\cos C$,

所以 $\cos C=\frac{1}{2}$,

所以 $C=\frac{\pi}{3}$. ………… 4 分

(2)由余弦定理得:$c^2=a^2+b^2-2ab\cos c$,即 $1=a^2+b^2-ab$, ………… 6 分

所以 $1\geqslant 2ab-ab$,即 $0<ab\leqslant 1$. ………… 8 分

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin c\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$,

$\therefore S_{\triangle ABC}\in(0,\frac{\sqrt{3}}{4}]$. ………………………………………………………… 10 分

18. 解：(1) 根据直方图可知，成绩在[80,100]的频率为$(0.025+0.010)\times10=0.35$，大于 0.3，

成绩[90,100]的频率为 0.1，小于 0.2，

因此获奖的分数线应该介于[80,90)之间. ………………………………………… 2 分

设分数线为 $x\in[80,90)$，使得成绩在$[x,100]$的概率为 0.3，

即$(90-x)\times0.025+0.010\times10=0.3$，

可得 $x=82$，………………………………………………………………………… 4 分

所以获奖分数线划定为 82. ………………………………………………………… 5 分

(2) 应从[80,90)和[90,100]两组内分别抽取 5 人和 2 人，………………………… 6 分

则 ξ 的可能取值为 0,1,2，……………………………………………………………… 7 分

$P(\xi=0)=\frac{C_5^2C_2^0}{C_7^2}=\frac{10}{21}$,

$P(\xi=1)=\frac{C_5^1C_2^1}{C_7^2}=\frac{10}{21}$,

$P(\xi=2)=\frac{C_5^0C_2^2}{C_7^2}=\frac{1}{21}$, ………………………………………………………… 10 分

ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{1}{21}$

$\therefore$ 数学期望 $E(\xi)=0\times\frac{10}{21}+1\times\frac{10}{21}+2\times\frac{1}{21}=\frac{4}{7}$. ………………………………… 12 分

19. 解：(1) 设$\{a_n\}$的公比为 q，$\because a_1=1$，a_3+1 是 a_2 与 a_4 的等差中项，

$\therefore 2(1+q^2)=q+q^3$，$\therefore (q-2)(q^2+1)=0$，

$\therefore q=2$，………………………………………………………………………… 2 分

$\therefore a_n=2^{n-1}$，……………………………………………………………………… 4 分

$\therefore S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$. ……………………………………………………………… 6 分

(2) 由题意知，$\log_2 a_k=S_m$，

又 $a_k=2^{k-1}$，$S_m=2^m-1$，

$\therefore k-1=2^m-1$，即 $k=2^m$，………………………………………………………… 8 分

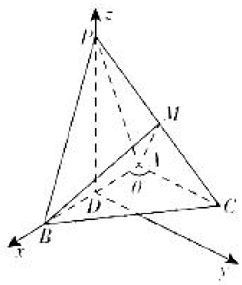
故 $A=\{k\mid k=2^m,m\in\mathbf{N}^*\}$.

又 $\log_2 a_n=n-1$，

$\therefore T_{20}=(\log_2 a_1+\log_2 a_2+\cdots+\log_2 a_{20})-(\log_2 a_2+\log_2 a_4+\log_2 a_8+\log_2 a_{16})-4$ ………… 10 分

$=(0+1+\cdots 19)-(1+3+7+15)-4$ …………………………………… 11 分

$=160.$ ………………………………………………………………………… 12 分



20.解:取 AB 得中点 D,由于 $PA=PB$,因此 $PD\perp AB$,

又$\because$ 平面 $PAB\perp$ 平面 ABC,$\therefore PD\perp$ 平面 ABC.

以 D 为原点,建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$. …… 1 分

$\because PA=PB=3,AB=AC=4,\therefore PD=\sqrt{5}$,

则 $A(-2,0,0),B(2,0,0),P(0,0,\sqrt{5})$. …………………… 2 分

(1)当 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$时,$C(0,2\sqrt{3},0),M(0,\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{5}}{2})$, ……………… 3 分

取平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$, ………………………………… 4 分

$\because \overrightarrow{BM}=(-2,\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{5}}{2})$, …………………………………………………… 5 分

设直线 BM 与平面 ABC 所成的角为 φ,

$$\therefore \sin\varphi=\frac{|\overrightarrow{BM}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BM}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{4+3+\frac{5}{4}}}=\frac{\sqrt{165}}{33}.$$

$\therefore$ 直线 BM 与平面 ABC 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{165}}{33}$. ……………………………… 6 分

(2)由题意知 $C(-2+4\cos\theta,4\sin\theta,0),M(2\cos\theta-1,2\sin\theta,\dfrac{\sqrt{5}}{2})$. …………………… 7 分

又$\overrightarrow{AB}=(4,0,0),\overrightarrow{AM}=(2\cos\theta+1,2\sin\theta,\dfrac{\sqrt{5}}{2})$, …………………………………… 8 分

$\because AM\perp AB,\therefore \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=0.$ …………………………………………………… 9 分

即 $4(2\cos\theta+1)=0,\therefore \cos\theta=-\dfrac{1}{2},\theta=\dfrac{2\pi}{3}$, …………………………………… 10 分

在$\triangle ABC$ 中,$AB=AC=4,\angle BAC=\dfrac{2\pi}{3}$,

$\therefore BC=4\sqrt{3}.$ …………………………………………………………………… 12 分

21.解:(1)由题意知$\dfrac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{|x-4|}=\dfrac{1}{2}$, ………………………………………… 2 分

化简整理得曲线 C 的轨迹方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1.$ ……………………………………… 4 分

(2)证明:设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P(x_0,y_0)$,

由题意知$\dfrac{x_0^2}{12}+\dfrac{y_0^2}{9}=1.$

由$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DE}$，可知$D,E$分别为$AP,BP$的中点，

所以，$D(\frac{x_1+x_0}{2},\frac{y_1+y_0}{2})$，$E(\frac{x_2+x_0}{2},\frac{y_2+y_0}{2})$. ………………………… 5分

由$\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1,\\ \frac{1}{4}(\frac{x_1+x_0}{2})^2+\frac{1}{3}(\frac{y_1+y_0}{2})^2=1,\end{cases}$ 得$\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}+\frac{x_0x_1}{2}+\frac{2y_0y_1}{3}-3=0$，………… 6分

$\because \frac{x_0^2}{12}+\frac{y_0^2}{9}=1$，$\therefore \frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=3$，$\therefore 3x_0x_1+4y_0y_1=0$.

同理$3x_0x_2+4y_0y_2=0$，

所以A,B都在直线$3x_0x+4y_0y=0$上. ………………………… 7分

由$\begin{cases}3x_0x+4y_0y=0,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得$x^2=\frac{16y_0^2}{3x_0^2+4y_0^2}$，$y^2=\frac{9x_0^2}{3x_0^2+4y_0^2}$，………………… 8分

又因为直线AB过坐标原点，

所以$|AB|=2\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{\frac{9x_0^2+16y_0^2}{3x_0^2+4y_0^2}}$，………………………… 9分

又点P到直线AB的距离$d=\frac{3x_0^2+4y_0^2}{\sqrt{9x_0^2+16y_0^2}}$，………………… 10分

所以，$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB|d=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{\frac{9x_0^2+16y_0^2}{3x_0^2+4y_0^2}}\cdot\frac{3x_0^2+4y_0^2}{\sqrt{9x_0^2+16y_0^2}}=\sqrt{3x_0^2+4y_0^2}$. ……… 11分

又$\because \frac{x_0^2}{12}+\frac{y_0^2}{9}=1$，$\therefore 3x_0^2+4y_0^2=36$，

故$S_{\triangle PAB}==6$.

所以$\triangle PAB$的面积为定值. ………………………… 12分

22.(Ⅰ)解：显然$x>0,a>0$，

$ae^x+\ln a\geqslant f(x)=\ln x$恒成立，

即$ae^x\geqslant \ln x-\ln a$恒成立. ………………………… 1分

只要$ae^x\geqslant \ln\frac{x}{a}$恒成立，

即$xe^x\geqslant\frac{x}{a}\ln\frac{x}{a}$恒成立，

即$xe^x\geqslant(\ln\frac{x}{a})e^{\ln\frac{x}{a}}$恒成立. ………………………… 2分

当 $\ln\frac{x}{a}\leqslant 0$ 时，上式显然成立，故上式恒成立，只需满足 $\ln\frac{x}{a}>0$ 时恒成立即可. …………………………………………………………………………………………………… 3 分

设 $u(x)=xe^x$，则上式化为 $u(x)\geqslant u(\ln\frac{x}{a})$ (＊)

而 $u'(x)=(1+x)e^x$，可得 $u(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 单调递增.

因此(＊)式恒成立，只需 $x\geqslant\ln\frac{x}{a}$ 恒成立. …………………………………… 4 分

即 $e^x\geqslant\frac{x}{a}$ 对 $x>0$ 恒成立.

于是 $a\geqslant\frac{x}{e^x}$ 恒成立，

即 $a\geqslant(\frac{x}{e^x})_{max}$. ……………………………………………………………………… 5 分

设 $r(x)=\frac{x}{e^x}$，$(x>0)$，则 $r'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，

可得 $r(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减，

则 $r_{max}=r(1)=\frac{1}{e}$，于是 $a\geqslant\frac{1}{e}$，

∴ 实数 a 的最小值为 $\frac{1}{e}$. ……………………………………………………………… 6 分

(2)证明：设直线 l 分别切 $f(x)$，$g(x)$ 的图象于点 $(x_1,\ln x_1)$，$(x_2,x_2^2-x_2+2)$，

由 $f(x)=\ln x$ 可得 $f'(x)=\frac{1}{x}$，得 l 的方程为 $y-\ln x_1=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$，

即 l：$y=\frac{1}{x_1}x+\ln x_1-1$. …………………………………………………………… 7 分

由 $g(x)=x^2-x+2$ 可得 $g'(x)=2x-1$，

得 l 的方程为 $y-(x_2^2-x_2+2)=(2x_2-1)(x-x_2)$，即 l：$y=(2x_2-1)x-x_2^2+2$. ……… 8 分

比较 l 的方程，得 $\begin{cases}\frac{1}{x_1}=2x_2-1,\\ \ln x_1-1=-x_2^2+2,\end{cases}$

消去 x_2，得 $\ln x_1+\frac{(1+x_1)^2}{4x_1^2}-3=0$. ………………………………………… 9 分

令 $F(x)=\ln x+\frac{(1+x)^2}{4x^2}-3(x>0)$，

则 $F'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1+x}{2x^3}=\frac{(2x+1)(x-1)}{2x^3}$. ……………………………………… 10 分

当 $0<x<1$ 时，$F'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$F'(x)>0$，

$\therefore F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore F(x)_{min}=F(1)=-2<0$.

$\because F(e^{3})=\ln e^{3}+\dfrac{(1+e^{3})^{2}}{4e^{6}}-3>0$，

$\therefore F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有一个零点. …………………………………………………… 11 分

由 $F(x)=\ln x+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4x^{2}}-\dfrac{11}{4}$，得 $F(e^{-2})=-2+\dfrac{e^{2}}{2}+\dfrac{e^{4}}{4}-\dfrac{11}{4}=\dfrac{e^{2}-4}{2}+\dfrac{e^{4}-11}{4}>0$，

$\therefore F(x)$ 在 $(0,1)$ 上有一个零点，

$\therefore F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且只有两个零点，

故有且只有两条直线与函数 $f(x)$，$g(x)$ 的图象都相切. ………………………… 12 分