2022~2023 学年第一学期高三期中调研试卷

数 学

2022.11

注 意 事 项

学生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求：

1. 本卷共 4 页，包含单项选择题（第 1 题~第 8 题）、多项选择题（第 9 题~第 12 题）、填空题（第 13 题~第 16 题）、解答题（第 17 题~第 22 题）. 本卷满分 150 分，答题时间为 120 分钟. 答题结束后，请将答题卡交回.
2. 答题前，请您务必将自己的姓名、调研序列号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在答题卡的规定位置.
3. 请在答题卡上按照顺序在对应的答题区域内作答，在其他位置作答一律无效. 作答必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔. 请注意字体工整，笔迹清楚.
4. 请保持答题卡卡面清洁，不要折叠、破损. 一律不准使用胶带纸、修正液、可擦洗的圆珠笔.

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分. 每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的. 请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1. 已知集合 $A=\{x\,|\,x^2\le 4x\}$，$B=\{x\,|\,3x-4>0\}$，则 $A\cap B=$ （　　）

A. $[0,+\infty)$　　B. $[0,\frac{4}{3})$　　C. $(\frac{4}{3},4]$　　D. $(-\infty,0)$

2. 设复数 z 满足 $(1+i)z=2i$，则 $|z|=$ （　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

3. 在 ΔABC 中，点 N 满足 $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{NC}$，记 $\overrightarrow{BN}=\vec{a}$，$\overrightarrow{NC}=\vec{b}$，那么 $\overrightarrow{BA}=$ （　　）

A. $\vec{a}-2\vec{b}$　　B. $\vec{a}+2\vec{b}$　　C. $\vec{a}-\vec{b}$　　D. $\vec{a}+\vec{b}$

4. “$\sin\alpha+\cos\alpha=1$”是“$\sin 2\alpha=0$”的 （　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

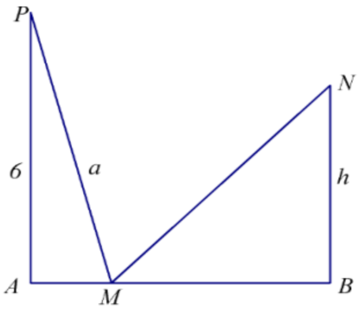
5. 奇函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增，若正数 m,n 满足 $f(2m)+f(\frac{1}{n}-1)=0$，则 $\frac{1}{m}+n$ 的最小值为 （　　）

A. 3　　B. $4\sqrt{2}$　　C. $2+2\sqrt{2}$　　D. $3+2\sqrt{2}$

6. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos\omega x-\sin\omega x$（$\omega>0$）的周期为 2π，那么当 $x\in[0,\frac{2\pi}{3}]$ 时，$\omega f(x)$ 的取值范围是 （　　）

A. $[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$　　B. $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　　C. $[-\frac{\sqrt{3}}{2},1]$　　D. $[-1,2]$

7．古时候，为了防盗、防火的需要，在两边对峙着高墙深院的"风火巷"里常有梯子、铜锣、绳索等基本装备．如图，梯子的长度为a，梯脚落在巷中的M点，当梯子的顶端放到右边墙上的N点时，距地面的高度是h，梯子的倾斜角正好是45°，当梯子顶端放到左边墙上的P点时，距地面的高度为6尺（1米=3尺），此时梯子的倾斜角是75°．则小巷的宽度AB等于（　）



A．6尺　　B．a尺　　C．（$h+2$）尺　　D．$\dfrac{h+a}{2}$尺

8．已知实数$a=\log_2 3$，$b=2\cos 36^{\circ}$，$c=\sqrt{2}$，那么实数a,b,c的大小关系是（　）

A．$b>c>a$　　B．$b>a>c$　　C．$a>b>c$　　D．$a>c>b$

二、多项选择题：本大题共**4**小题，每小题**5**分，共计**20**分．每小题给出的四个选项中，都有多个选项是正确的，全部选对的得**5**分，选对但不全的得**2**分，选错或不答的得**0**分．请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上．

9．已知非零实数a,b,c满足$a>b>c$且$a+b+c=0$，则下列不等关系一定正确的有（ ）

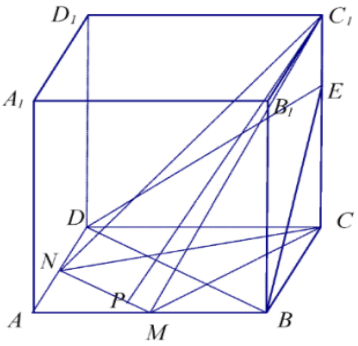
A．$\dfrac{c}{a}>\dfrac{c}{b}$　　B．$\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}\le -2$　　C．$(a-b)^a>(b-c)^a$　　D．$\dfrac{c}{a}\in(-2,-\dfrac{1}{2})$

10．已知函数$f(x)=\cos 2x-2\cos x\cos 3x$，则（　）

A．$f(x)$的最大值为1　　B．$f(\dfrac{\pi}{6})=f(-\dfrac{\pi}{3})$

C．$f(x)$在$(-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{6})$上单调递增　　D．$f(x)$的图象关于直线$x=\dfrac{\pi}{4}$对称

11．在棱长为2的正方体中，M,N分别是棱AB,AD的中点，线段MN上有动点P，棱CC_1上点E满足$C_1C=3C_1E$．以下说法中，正确的有（　）



A．直线C_1P与BE是异面直线

B．直线C_1P // 平面BDE

C．三棱锥$C-C_1MN$的体积是1

D．三棱锥$C-C_1MN$的体积是3

12．已知函数$f(x)=(x^2-x)(x^2+ax+b)$的图象关于直线$x=2$对称，则（　）

A．$a+b=5$　　B．$f(x)$的最小值是$-\dfrac{35}{16}$

C．$f(x)$图象与直线$2x+y-8=0$相切　　D．$f(x)$图象与直线$12x-y-48=0$相切

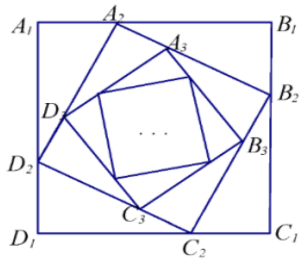
三、填空题：本大题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共计 **20** 分．请把答案填写在答题卡相应位置上．

13．命题 p：$\exists x\in R$，$x^2+mx+2\le 0$，若“非 p”为真命题，则 m 的取值范围是____．

14．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\le 0,\\ |\log_2 x|, & x>0,\end{cases}$ 则函数 $g(x)=2-f[f(x)]$ 的所有零点之积等于__．

15．在 ΔABC 中，已知 $B>C$，$\cos A=\dfrac{31}{32}$，$\cos(B-C)=\dfrac{1}{8}$，那么 $\tan B=$____________．

16．侏罗纪蜘蛛网是一种非常有规律的蜘蛛网，如图是由无数个正方形环绕而成的，且每一个正方形的四个顶点都恰好在它的外边最近一个正方形四条边的三等分点上．设外围第一个正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 1，往里第二个正方形为 $A_2B_2C_2D_2$，…，往里第 n 个正方形为 $A_nB_nC_nD_n$．那么第 7 个正方形的周长是____________，至少需要前____________个正方形的面积之和超过 2．（本小题第一空 2 分，第二空 3 分，参考数据：$\lg 2=0.301$，$\lg 3=0.477$）．



四、解答题：本大题共 **6** 小题，共计 **70** 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分 10 分）在锐角 ΔABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $2b\sin A-\sqrt{3}a=0$．

（1）求角 B 的大小；

（2）求 $\cos A\cos B\cos C$ 的取值范围．

▲　▲　▲

18．（本小题满分 12 分）平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $E(\cos\alpha,\sin\alpha)$（其中 $0\le\alpha\le\pi$），将向量 $\overrightarrow{OE}$ 逆时针方向旋转 90^0，得到向量 $\overrightarrow{OF}$，记 $A(1,0)$，$B(0,-1)$．

（1）求 $|\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}|$ 的最大值；

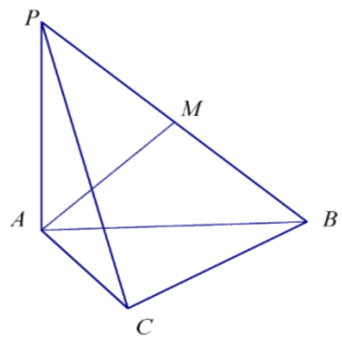
（2）试判断两向量 $\overrightarrow{AE}$ 与 $\overrightarrow{BF}$ 的位置关系．

▲　▲　▲

19.（本小题满分 12 分）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$\angle ACB=90^{\circ}$，$PA\perp$ 底面 ABC．

（1）求证：平面 $PAC\perp$ 平面 PBC；

（2）若 $AC=BC=PA$，M 是 PB 的中点，记 AM 与底面 ABC 所成角为 α，AM 与平面 PBC 所成角为 β，试研究 α 与 β 的等量关系．



▲　▲　▲

20.（本小题满分 12 分）已知首项 $a_1=4$ 的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，对任意 $n\in N^*$ 都有 $\dfrac{a_n}{S_n}=\dfrac{n+1}{2n}$．

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记 $c_n=\dfrac{a_n}{2^n}$，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，有 $A\le\dfrac{1}{T_1}+\dfrac{1}{T_2}+\cdots+\dfrac{1}{T_n}\le B$ 恒成立，求 $B-A$ 的最小值．

▲　▲　▲

21.（本小题满分 12 分）给定函数 $f(x)=(x+1)e^x$．

（1）判断函数 $f(x)$ 的单调性，并求出 $f(x)$ 的极值；

（2）画出函数 $f(x)$ 的大致图象；

（3）求出方程 $f(x)=a$（$a\in R$）的解的个数．

▲　▲　▲

22.（本小题满分 12 分）已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-(\ln a)\cdot x$（实数 $a>0$）．

（1）若实数 $a\in N^*$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)<0$ 恒成立，求实数 a 的最小值；

（2）证明：$(1+\dfrac{1}{n})^n<3$．

▲　▲　▲

2022~2023 学年第一学期高三期中调研试卷

数 学 参 考 答 案

2022.11

一、单项选择

1．C 2．C 3．A 4．A 5．D 6．B 7．A 8．B

8.解：由于 $\cos 36^\circ > \cos 45^\circ$ 可得 $2\cos 36^\circ > \sqrt{2}$ 即 $b > c$．

又由于 $\log_2 3 > \frac{1}{2}(\log_2 2 + \log_2 4) = \frac{3}{2} > \sqrt{2}$，所以 $a > c$．

由于 $3^5 < 2^8$，$5\ln 3 < 8\ln 2$，$a = \log_2 3 < \frac{8}{5}$，$b = 2\cos 36^\circ = 2\times\frac{\sqrt{5}+1}{4} > 1.6$，

所以 $b > a > c$．选 B 项.

二、多项选择

9．BD 10．ABD 11．ABC 12．AD

12.解：因为 $y = f(x)$ 图象关于直线 $x = 2$ 对称，当 $x = 3$ 时，$f(3) = f(1) = 0$，于是 $9 + 3a + b = 0$，当 $x = 4$ 时，$f(4) = f(0) = 0$，于是 $16 + 4a + b = 0$，于是 $a = -7$，$b = 12$，所以 $a + b = 5$．

$f(x) = (x^2 - x)(x^2 - 7x + 12) = x(x-1)(x-3)(x-4) = (x^2 - 4x)(x^2 - 4x + 3)$，令

$t = x^2 - 4x$，$t \geq -4$，则 $g(t) = t(t+3) = t^2 + 3t$，$t \geq -4$，因为 $g(t) = t^2 + 3t$ 图象开口向上，对称轴是

$t = -\frac{3}{2}$，所以 $g(t)$ 的最小值为 $-\frac{9}{4}$．联立方程 $\begin{cases} y = x(x-1)(x-3)(x-4) \\ y = 8 - 2x \end{cases}$，$x = 4$ 是方程组的解，约分

$x - 4$，而方程 $x(x-1)(x-3) = -2$ 有三个解，所以 $f(x)$ 与直线 $2x + y - 8 = 0$ 不能相切．函数 $y = f(x)$ 在

$x = 4$ 处的切线方程为 $12x - y - 48 = 0$．

三、填空题

13．$(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ 14．-2 15．$-\frac{5\sqrt{7}}{9}$ 16．$\frac{500}{729}$，4

15 解：由 $\cos A = \frac{31}{32}$ 得到 $\cos B\cos C - \sin B\sin C = -\frac{31}{32}$，由 $\cos(B - C) = \frac{1}{8}$ 得到

$\cos B\cos C + \sin B\sin C = \frac{1}{8}$，于是 $\cos B\cos C = -\frac{27}{64}$，$\sin B\sin C = \frac{35}{64}$，于是 $\tan B\tan C = -\frac{35}{27}$．在

ΔABC 中，$\tan(B+C) = \frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B\tan C} = -\tan A = -\frac{3\sqrt{7}}{31}$，于是

$\tan B + \tan C = -\frac{2\sqrt{7}}{9}$．再由 $\tan B\tan C = -\frac{35}{27}$，解方程组得到 $\tan B = -\frac{5\sqrt{7}}{9}$ 或 $\tan B = \frac{\sqrt{7}}{3}$，由于

$B>C$，取 $\tan B=-\dfrac{5\sqrt{7}}{9}$.

四、解答题

17．解：（1）由正弦定理，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$，代入 $2b\sin A-\sqrt{3}a=0$，

有 $2\times 2R\sin B\sin A-\sqrt{3}\times 2R\sin A=0$，

因为 A 是三角形的内角，$\sin A\neq 0$，所以 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，　…………………2 分

注：不说明 $\sin A\neq 0$，扣 1 分。如果说明了 A 是三角形的内角，锐角三角形等都可以

在锐角 ΔABC 中，$B=\dfrac{\pi}{3}$.　…………………4 分

注：不说明锐角三角形扣 1 分

（2）由（1），$B=\dfrac{\pi}{3}$，$A+C=\dfrac{2\pi}{3}$，$C=\dfrac{2\pi}{3}-A$

于是 $\cos A\cos B\cos C=\cos A\cos\dfrac{\pi}{3}\cos(\dfrac{2\pi}{3}-A)$　…………………6 分

$=\dfrac{1}{2}\cos A(-\dfrac{1}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin A\cos A-\dfrac{1}{4}\cos^2 A$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{8}\sin 2A-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1+\cos 2A}{2}=\dfrac{1}{4}\sin(2A-\dfrac{\pi}{6})-\dfrac{1}{8}$　…………………8 分

在锐角 ΔABC 中，由于 $B=\dfrac{\pi}{3}$，有 $\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{6}<2A-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，

注：正确求出角 A 的范围给 1 分

于是 $\sin(2A-\dfrac{\pi}{6})\in(\dfrac{1}{2},1]$，$\dfrac{1}{4}\sin(2A-\dfrac{\pi}{6})-\dfrac{1}{8}\in(0,\dfrac{1}{8}]$.

所以 $\cos A\cos B\cos C$ 的取值范围是 $(0,\dfrac{1}{8}]$.　…………………10 分

18．解析：（1）向量 $\overrightarrow{OE}$ 逆时针方向旋转 90^0，得到点 $F(-\sin\alpha,\cos\alpha)$，　…………2 分

又因为 $A(1,0)$，所以 $\overrightarrow{AE}=(\cos\alpha-1,\sin\alpha)$，$\overrightarrow{AF}=(-\sin\alpha-1,\cos\alpha)$，

所以 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=(\cos\alpha-\sin\alpha-2,\sin\alpha+\cos\alpha)$，　…………………4 分

所以 $|\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}|=\sqrt{(\cos\alpha-\sin\alpha-2)^2+(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$

$=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+4-2\sin\alpha\cos\alpha-4\cos\alpha+4\sin\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\sqrt{6+4\sqrt{2}\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{4})}$　…………………6 分

$\le \sqrt{6+4\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}$，

所以$|\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}|$的最大值为$2+\sqrt{2}$，此时$\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{4})=1$，$\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$． ………………8 分

注：不说明取得最值的条件即：$\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$扣 1 分

（2）由题意，$\overrightarrow{AE}=(\cos\alpha-1,\sin\alpha)$，$\overrightarrow{BF}=(-\sin\alpha,\cos\alpha+1)$， ………………9 分

因为$(\cos\alpha-1)(\cos\alpha+1)-\sin\alpha(-\sin\alpha)=(\cos^2\alpha-1)+\sin^2\alpha=0$，

所以$(\cos\alpha-1)(\cos\alpha+1)=\sin\alpha(-\sin\alpha)$， ………………11 分

所以两向量$\overrightarrow{AE}$与$\overrightarrow{BF}$平行. ………………12 分

19．解析：（1）证明：因为$PA\perp$底面ABC，$BC\subset$底面ABC，所以$PA\perp BC$．…1 分

又因为$\angle ACB=90^\circ$，即$AC\perp BC$，

又因为$PA,AC\subset$平面PAC，且PA,AC相交于点A，

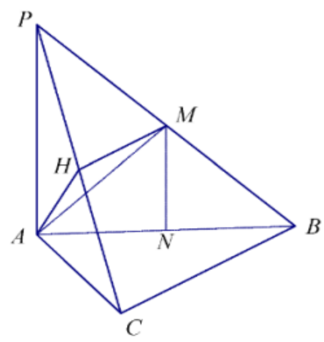
所以直线$BC\perp$平面PAC． ……………………………………………………………3 分

注：只是不说明 PA、AC 在平面 PAC 内，扣 1 分，如果再少其它条件扣 2 分，讲评时要强调条件缺一不可。

又因为$BC\subset$平面PBC，所以平面$PBC\perp$平面PAC． ………………4 分

（2）解：取AB的中点N，连接MN，由于M是PB的中点，有$MN//PA$，又因为$PA\perp$底面ABC，所以$MN\perp$底面ABC，所以$\angle MAN$就是直线AM与底面ABC所成角α．记$AC=BC=PA=2a$，在直角ΔMAN中，计算得到

$\tan\alpha=\tan\angle MAN=\dfrac{a}{\sqrt{2}a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$． ………………7 分



取PC的中点H，连接AH,HM，由于$AC=PA$，有$AH\perp PC$．由（1）$BC\perp$平面PAC，$AH\subset$平面PAC，所以$BC\perp AH$．又因为$PC,BC\subset$平面PBC，PC,BC相交于点C，所以$AH\perp$平面PBC，所以$\angle AMH$就是直线AM与平面PBC所成角β．

注：在证明过程中少条件的话要适当扣 1-2 分，并在讲评时强调条件缺一不可。

在直角ΔAMH中，计算得到$\tan\beta=\tan\angle AMH=\dfrac{\sqrt{2}a}{a}=\sqrt{2}$． ………………10 分

由于α、β都是锐角，所以$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$． ………………12 分

注：不说明α、β都是锐角扣 1 分。

20．解析：由 $\frac{a_n}{S_n}=\frac{n+1}{2n}$ 得到 $S_n=\frac{2na_n}{n+1}$，当 $n\geq 2$ 时，$S_{n-1}=\frac{2(n-1)a_{n-1}}{n}$，　……1 分

两式相减，有 $a_n=\frac{2na_n}{n+1}-\frac{2(n-1)a_{n-1}}{n}$，得到 $\frac{2(n-1)a_{n-1}}{n}=\frac{(n-1)a_n}{n+1}$，

由于 $n\geq 2$，$\frac{a_n}{n+1}=2\frac{a_{n-1}}{n}$，　………………3 分

因为 $\frac{a_1}{2}=2$，由上述递推关系知 $\frac{a_n}{n+1}\neq 0$

（注：这里不说明不扣分，说明等比数列时也不一定要写成比的形式。但讲评时强调要说明按照定义证明，）

所以 $\{\frac{a_n}{n+1}\}$ 是以 $\frac{a_1}{2}=2$ 为首项，2 为公比的等比数列，

所以 $\frac{a_n}{n+1}=2\times 2^{n-1}$，$a_n=(n+1)2^n$．　…………5 分

（2）由（1）$c_n=n+1$，前 n 项和为 $T_n=\frac{n(2+n+1)}{2}=\frac{n(n+3)}{2}$，　…………7 分

$\frac{1}{T_n}=\frac{2}{n(n+3)}=\frac{2}{3}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3})$，

$\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\cdots+\frac{1}{T_n}=\frac{2}{3}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3})$　…………9 分

$<\frac{2}{3}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})=\frac{11}{9}$，又由于 $\frac{1}{T_n}>0$，$\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\cdots+\frac{1}{T_n}\geq\frac{1}{T_1}=\frac{1}{2}$，　…………11 分

所以 $B-A\geq\frac{11}{9}-\frac{1}{2}=\frac{13}{18}$，$B-A$ 的最小值为 $\frac{13}{18}$．　…………12 分

21．解析：（1）函数的定义域为 R．

$f'(x)=(x+1)'e^x+(x+1)(e^x)'=(x+2)e^x$．

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-2$．　…………2 分

$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如表所示．

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	单调递减	$-\frac{1}{e^2}$	单调递增

所以，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，在区间 $(-2,+\infty)$ 上单调递增．当 $x=-2$ 时，$f(x)$ 有极小值

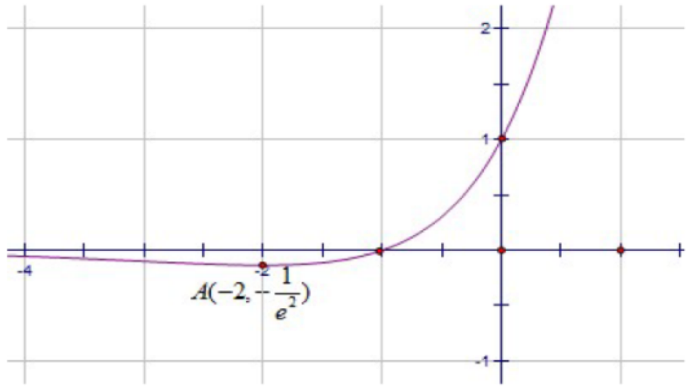
$f(-2)=-\frac{1}{e^2}$．　…………4 分

注：不列表也可以，只要说明清楚了在-2 左右两边的单调性就可以。

（2）令 $f(x)=0$，解得 $x=-1$．当 $x<-1$ 时，$f(x)<0$；当 $x>-1$ 时，$f(x)>0$．

所以，$f(x)$ 的图象经过特殊点 $A(-2,-\frac{1}{e^2})$，$B(-1,0)$，$C(0,1)$．…………6 分

当 $x\to-\infty$ 时，与一次函数相比，指数函数 $y=e^{-x}$ 呈爆炸性增长，从而 $f(x)=\frac{x+1}{e^{-x}}\to 0$；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，$f'(x)\to+\infty$．



根据以上信息，我们画出 $f(x)$ 的大致图象如图所示．…………8 分

注：这里如上述描述(教材上就是这样描述的)正常给分。没有说明，只画图，只要图形正确也给分，不扣分。

（3）方程 $f(x)=a$（$a\in R$）的解的个数为函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 的交点个数．

由（1）及图可得，当 $x=-2$ 时，$f(x)$ 有最小值 $f(-2)=-\frac{1}{e^2}$．

所以关于方程 $f(x)=a$（$a\in R$）的解的个数有如下结论：

当 $a<-\frac{1}{e^2}$ 时，解为 0 个；

当 $a=-\frac{1}{e^2}$ 或 $a\ge 0$ 时，解为 1 个；

当 $-\frac{1}{e^2}<a<0$ 时，解为 2 个．…………12 分

注：只要给出的结论正确，均正常给分

22．解析：（1）因为 $f(x)=\ln(1+x)-(\ln a)\cdot x$，求导得 $f'(x)=\frac{1}{1+x}-\ln a$．……1 分

由于 $x\in(0,+\infty)$，$\frac{1}{1+x}\in(0,1)$，又因为 $a\in N^*$，

当 $a=1$ 时，$f'(x)=\frac{1}{1+x}>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)>f(0)=0$ 舍去；3 分

当 $a=2$ 时，令 $f'(x)=\frac{1}{1+x}-\ln 2=0$，得 $x=\frac{1}{\ln 2}-1>0$，当 $x\in(0,\frac{1}{\ln 2}-1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{\ln 2}-1)$ 上单调递增，此区间上 $f(x)>f(0)=0$ 舍去；……5 分

当 $a\ge 3$ 时，由于 $\frac{1}{1+x}\in(0,1)$，$\ln a>1$，$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\ln a$ 恒小于零，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$f(x)<f(0)=0$，满足题意．…………7 分

综合上述，实数 a 的最小值为 3．…………8 分

注：如果用罗比塔法则求解，适当给分，一般表述会有问题，结论正确时也不宜超过 5 分。

（2）由（1），当 $a=3$ 时，$f(x)<0$ 恒成立，即 $\ln(1+x)-(\ln 3)\cdot x<0$，于是

$\ln(1+x)<(\ln 3)\cdot x$. …………10 分

取 $x=\frac{1}{n}$，有 $\ln(1+\frac{1}{n})<(\ln 3)\cdot\frac{1}{n}$，所以 $n\ln(1+\frac{1}{n})<\ln 3$，即 $\ln(1+\frac{1}{n})^n<\ln 3$，

所以 $(1+\frac{1}{n})^n<3$. …………12 分

注：其它解法参照给分，如果是分析法，要注意是否有相应过渡性的语言联结。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。