中学生标准学术能力诊断性测试 2021 年 3 月测试

文科数学试卷（一卷）参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	D	C	A	C	B	B	C	A	C	D	A

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．4

14．2

15．4

16．$\sqrt{2}$

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17．解：

（1）由已知得 $4S_n=(a_n+1)^2$ ①

$\therefore n\geq 2$ 时，$4S_{n-1}=(a_{n-1}+1)^2$ ②

①-②得 $4a_n=a_n^2+2a_n-a_{n-1}^2-2a_{n-1}$……….2 分

即 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$，$\because \{a_n\}$ 为正项数列，$\therefore a_n+a_{n-1}>0$，

可得：$a_n-a_{n-1}=2(n\geq 2)$，即 $\{a_n\}$ 是以 2 为公差的等差数列……….4 分

由 $2\sqrt{S_1}=a_1+1, S_1=a_1$，得 $a_1=1$，

$\therefore a_n=2n-1$……….6 分

（2）$b_n=\dfrac{2}{a_n\cdot a_{n+2}}=\dfrac{2}{(2n-1)(2n+3)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+3}\right)$……….9 分

$$B_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)<\frac{2}{3}$$ ....12 分

18．解：

（1）证明：因为四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是直角梯形， $AD//BC$，

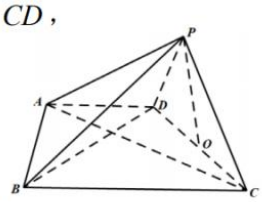
$\angle ABC=\angle DAB=90^\circ$，$BC=2AB=2AD=2$，

$\therefore BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{2}$，$DC=\sqrt{2}$ ....2 分

可得：$BD^2+CD^2=BC^2$，$\therefore BD\perp DC$ ....4 分

又因为平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $PCD\cap$ 平面 $ABCD=CD$，

又 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore BD\perp$ 平面 PCD ....6 分



（2）$\because PD=PC=\sqrt{2}$，取 CD 的中点 O，连接 PO，

则由（1）知 $DC=\sqrt{2}$，则△PDC 为等边三角形，$\therefore PO\perp CD$，

又因为平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，$PO\subset$ 平面 PCD，且平面 $PCD\cap$ 平面 $ABCD=CD$，

$\therefore PO\perp$ 平面 BCD ....8 分

$PO=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ....9 分

$\therefore V_{B-ACP}=V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot PO=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times2\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$ ....12 分

19．解：

（1）设 X 表示学生打电话所需的时间，用频率估计概率，得 X 的分布列如下：

X	1	2	3	4	5
P	0.2	0.4	0.25	0.1	0.05

A 表示事件“第四个学生恰好等待 5 分钟开始打电话”，则事件 A 对应两种情形：

①前三位同学打电话所花时间为 1 分钟，1 分钟，3 分钟（不计顺序），

②前三位同学打电话所花时间为 1 分钟，2 分钟，2 分钟（不计顺序），

$\therefore P(A)=C_3^1\times0.2^2\times0.25+C_3^1\times0.4^2\times0.2=0.03+0.096=0.126$

所以估计第四个学生恰好等待 5 分钟开始打电话的概率为 0.126 ....3 分

（2）Y 所有可能的取值为 0,1,2,3.

$Y=0$ 对应第一个学生打电话所需的时间超过 3 分钟，

$\therefore P(Y=0)=P(X=4)+P(X=5)=0.1+0.05=0.15$ ……….5 分

$Y=1$ 对应三种情形：

①第一个学生打电话所需的时间为 1 分钟且第二个学生打电话所需的时间超过 2 分钟，

②第一个学生打电话所需的时间为 2 分钟且第二个学生打电话所需的时间超过 1 分钟，

③第一个学生打电话所需的时间为 3 分钟

$\therefore P(Y=1)=0.2\times(1-0.2-0.4)+0.4\times(1-0.2)+0.25=0.08+0.32+0.25=0.65$

……….7 分

$Y=2$ 对应两种情形：

①前两个学生打电话所需的时间都为 1 分钟且第三个学生打电话所需的时间超过 1 分钟，

②前两个学生打电话所需的时间为 1 分钟和 2 分钟（不计顺序），

$\therefore P(Y=2)=0.2\times0.2\times(1-0.2)+C_2^1\times0.2\times0.4=0.032+0.16=0.192$ ……….9 分

$Y=3$ 对应前三个学生打电话所需的时间都为 1 分钟

$\therefore P(Y=3)=0.2^3=0.008$ ……….11 分

可得 Y 的分布列为

Y	0	1	2	3
P	0.15	0.65	0.192	0.008

$\mathrm{E}(Y)=0\times0.15+1\times0.65+2\times0.192+3\times0.008=1.058$ ……….12 分

20．解：

（1）由题意，设点 $A(t^2,2t)$，由于 A 为抛物线 C 上第一象限内的一点，$\therefore t>0$，

又因为点 A 在直线 $x=2$ 的右侧，可得 $t^2>2$，即 $t>\sqrt{2}$，

直线 BA 方程为 $y=\dfrac{2t}{t^2+2}(x+2)$……….1 分

解得 $x=\dfrac{t^2+2}{2t}\cdot y-2$，代入 $y^2=4x$ 得 $y^2-\dfrac{2(t^2+2)}{t}\cdot y+8=0$，

由韦达定理得 $y_D\cdot y_A=8,\therefore y_D=\dfrac{8}{2t}=\dfrac{4}{t}$……….3 分

$\because \overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}$，可得：$y_D=\dfrac{1}{2}(y_A-y_D),\therefore \dfrac{4}{t}=\dfrac{1}{2}\left(2t-\dfrac{4}{t}\right)$，解得 $t=\sqrt{6}$

即 A 点坐标为 $\left(6,2\sqrt{6}\right)$..........5 分

（2）由（1）知点 $D\left(\frac{4}{t^2},\frac{4}{t}\right)$，

$\because AD$ 的中点为 N，且 $|MN|\geq\frac{1}{2}|AD|$，则 $\angle AMD\leq 90^{\circ}$，$\therefore \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MD}\geq 0$．

$\because \overrightarrow{MA}=\left(t^2-2,2t\right),\overrightarrow{MD}=\left(\frac{4}{t^2}-2,\frac{4}{t}\right)$，从而 $\left(t^2-2\right)\cdot\left(\frac{4}{t^2}-2\right)+2t\cdot\frac{4}{t}\geq 0$，

化简可得：$t^4-8t^2+4\leq 0$，求得：$4-2\sqrt{3}\leq t^2\leq 4+2\sqrt{3}$，

由于 $t>\sqrt{2}$，解得 $\sqrt{2}<t\leq 1+\sqrt{3}$..........8 分

$S_{\Delta ADM}=S_{\Delta ABM}-S_{\Delta BDM}=\frac{1}{2}\times 4\times 2t-\frac{1}{2}\times 4\times\frac{4}{t}=4t-\frac{8}{t}=4\left(t-\frac{2}{t}\right)$..........10 分，

令 $f(t)=t-\frac{2}{t}$，则 $f(t)$ 在 $\left(\sqrt{2},1+\sqrt{3}\right]$ 单调递增，

$\therefore f(t)_{\max}=f\left(1+\sqrt{3}\right)=1+\sqrt{3}-\frac{2}{1+\sqrt{3}}=2$，

因此，△ AMD 面积的最大值为 8..........12 分

21．解：

（1）$\because f(x)=ax\cdot\ln x,a\neq 0$，要使 $f(x)<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，$\therefore a<0$..........1 分

又 $\because f'(x)=a(\ln x+1)$，由 $f'(x)=a(\ln x+1)>0$，解得：$0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$，

由 $f'(x)=a(\ln x+1)<0$ 解得：$x>\frac{1}{\mathrm{e}}$．

$\therefore f_{\max}(x)=f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\frac{a}{\mathrm{e}}$ ....3 分

依题意可得：$-\frac{a}{\mathrm{e}}<\frac{1}{\mathrm{e}}$，解得：$-1<a<0$..........4 分

（2）（i）$a<0$ 时，当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>0,g(x)<0$，$\therefore y=f(x)-g(x)$ 恒大于零，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)<0,g(x)>0$，$\therefore y=f(x)-g(x)$ 恒小于零，

当$x=1$时，$y=f(x)-g(x)=0$，令$h(x)=f(x)-g(x)$，

$\therefore a<0$时，$h(x)$在$(0,+\infty)$只有 1 个零点..........6 分

（ii）$a>0$时，令$h(x)=f(x)-g(x)$，则$h(x)=ax\ln x-1+\dfrac{2}{x+1}(x>0)$，

$h'(x)=a(\ln x+1)-\dfrac{2}{(x+1)^2},h''(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{4}{(x+1)^3}$，

$\because x>0,\therefore h''(x)>0$恒成立，$\therefore h'(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，

①注意到$h(1)=0$，当$h'(1)=0$，即$a=\dfrac{1}{2}$时，

$h'(x)$在$x\in(0,1)$上恒小于零，在$x\in(1,+\infty)$上恒大于零，

即：$h(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，

$\therefore h(x)\geq h(1)=0, y=h(x)$在$(0,+\infty)$只有 1 个零点..........8 分

②$0<a<\dfrac{1}{2}$时，$h'(1)=a-\dfrac{1}{2}<0$，由于$h'(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，

$\therefore h'(x)$在$(0,1]$上恒小于零，$h(x)$在$(0,1]$上单调递减，

$\because h(1)=0,\therefore h(x)$在$(0,1]$上有唯一零点 1．

又$\because h'(1)=a-\dfrac{1}{2}<0,h'\left(e^{\frac{2}{a}-1}\right)=2-\dfrac{2}{\left(e^{\frac{2}{a}-1}+1\right)^2}>0$

所以存在$x_0\in\left(1,e^{\frac{2}{a}-1}\right)$，使得$h'(x_0)=0$，

由于$h'(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，$h'(1)=a-\dfrac{1}{2}<0,\ h'(x_0)=0$，

$\therefore\ h(x)$在$(1,x_0)$在单调递减，在$(x_0,+\infty)$单调递增，$x_0\in\left(1,e^{\frac{2}{a}-1}\right)$，

$\therefore h(x_0)<h(1)=0$ ....10 分

又$0<a<\dfrac{1}{2},e^{\frac{1}{a}}>1,h\left(e^{\frac{1}{a}}\right)=e^{\frac{1}{a}}-1+\dfrac{2}{e^{\frac{1}{a}}+1}>0,\therefore x_0<e^{\frac{1}{a}}$，

由$h(x_0)<0,h\left(e^{\frac{1}{a}}\right)>0$，知$h(x)$在$\left(1,e^{\frac{1}{a}}\right)$上有唯一零点，

结合$h(x)$在$(x_0,+\infty)$单调递增，$h(x)$在$(1,+\infty)$上有唯一零点，

又$\because h(1)=0$，$\therefore 0<a<\frac{1}{2}$时，$h(x)$在$(0,+\infty)$上有2个零点……….11分

综上所述，当$a<0$或$a=\frac{1}{2}$时，$h(x)$在$(0,+\infty)$只有1个零点；

当$0<a<\frac{1}{2}$时，$h(x)$在$(0,+\infty)$上有2个零点……….12分

（二）选考题：共10分．请考生在第22、23题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．作答时请写清题号．

22．解：

（1）当$\alpha=\frac{\pi}{6}$时，C_1的普通方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)$……….1分

C_2的普通方程为$(x-2)^2+y^2=1$……….2分

联立方程组$\begin{cases}(x-2)^2+y^2=1,\\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3),\end{cases}$

可得：$(x-2)^2+\frac{1}{3}(x-3)^2=1$，

化简得：$2x^2-9x+9=0$，解得：$x_1=3,x_2=\frac{3}{2}$，

$\therefore C_1$与C_2的交点坐标为$(3,0),\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$……….4分

（2）C_1的普通方程为$\sin\alpha\cdot x-\cos\alpha\cdot y-3\sin\alpha=0$．

因为直线AO垂直C_1，所以直线AO的普通方程为$\cos a\cdot x+\sin a\cdot y=0$………5分

联立方程组$\begin{cases}\sin a\cdot x-\cos a\cdot y-3\sin a=0,\\ \cos a\cdot x+\sin a\cdot y=0,\end{cases}$

可得A点坐标为$(3\sin^2\alpha,-3\sin\alpha\cdot\cos\alpha)$……….7分

设$P(x,y)$，则$A(2x,2y)$，

所以当α变化时，P点轨迹的参数方程为$\begin{cases} x=\dfrac{3\sin^2\alpha}{2}, \\ y=-\dfrac{3\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2}, \end{cases}$（$\alpha$为参数）

可得：$\begin{cases} \cos 2\alpha = 1-\dfrac{4}{3}x, \\ \sin 2\alpha = -\dfrac{4}{3}y, \end{cases}$ 消去参数α，$\left(1-\dfrac{4}{3}x\right)^2+\left(-\dfrac{4}{3}y\right)^2=1$，

即：$\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+y^2=\dfrac{9}{16}$，

所以P点轨迹是以$\left(\dfrac{3}{4},0\right)$为圆心，半径为$\dfrac{3}{4}$的圆……….10 分

23．解：

（1）$\because a+b+c=3$，$\therefore a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=9$，

$\because \begin{cases} a^2+b^2\geq 2ab, \\ b^2+c^2\geq 2bc, \\ a^2+c^2\geq 2ac, \end{cases}$ 三式相加可得：$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$，

当且仅当$a=b=c$时“=”成立……….3 分

$\therefore a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=9\geq 3ab+3bc+3ac$，

即：$ab+bc+ac\leq 3$……….4 分

$\therefore a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=9\leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$，即：$a^2+b^2+c^2\geq 3$

综上可知，$a^2+b^2+c^2\geq 3\geq ab+bc+ac$，

当且仅当$a=b=c$时取等号……….5 分

（2）$\because a>0,b>0$，$\therefore \dfrac{a^2}{b}+b\geq 2\sqrt{\dfrac{a^2}{b}\cdot b}=2a$，当且仅当$a=b$时“=”成立……….7 分，

同理可得：$\dfrac{b^2}{c}+c\geq 2b$，当且仅当$b=c$时“=”成立，

$\dfrac{c^2}{a}+a\geq 2c$，当且仅当$a=c$时“=”成立，

三式相加可得：$\frac{a^2}{b}+b+\frac{b^2}{c}+c+\frac{c^2}{a}+a\geq 2(a+b+c)$，

即：$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c=3$，

$\therefore\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq 3$ 得证，当且仅当 $a=b=c$ 时取等号……….10 分