合肥一六八中学2023届高考全真模拟详解答案

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

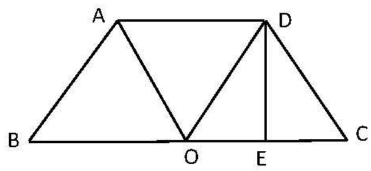
1． 答案 A

2．答案 A 由 $\frac{z}{1-\mathrm{i}}=\frac{3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，得 $z=\frac{(3+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}=\frac{4-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(4-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=1-3\mathrm{i}$，所以 $\overline{z}=1+3\mathrm{i}$，故选：A

3． 答案：B

详解：方程 $\frac{x^2}{2-m}+\frac{y^2}{m+1}=1$ 表示椭圆 $\Leftrightarrow \begin{cases}2-m>0\\ m+1>0\\ 2-m\neq m+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1<m<2\\ m\neq \frac{1}{2}\end{cases}$，所以“$m<2$”是“方程 $\frac{x^2}{2-m}+\frac{y^2}{m+1}=1$ 表示椭圆”的必要不充分条件，故选B。

4． 答案：D 详解：由题意，做出正四棱台的对角面，如图



AD为正四棱台上底面正方形对角线，BC为正四棱台下底面正方形对角线，O为外接球球心，为线段BC中点，则OD=OA=OB=OC=50

过点D作 $DE\perp BC$，垂足为E，则 $\angle DCE$ 即为所求角

因为 $OD=50$，$DE=40$，所以 $OE=30$，所以 $EC=20$，所以 $DC=20\sqrt{5}$，所以正四棱台的侧棱与底面所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$。

5． 答案：C，详解：由题意知：$a_1=2$，$a_2=3$，$a_3=6$，$a_4=8$，$a_5=8$，$a_6=4$，$a_7=2$，$a_8=8$，$a_9=6$，$a_{10}=8$，$a_{11}=8$，$a_{12}=4$，……，可知数列 $\{a_n\}$ 从第3项开始有 $a_{n+6}=a_n$，所以 $a_{2023}=2$，故答案选C。

6．答案C 解：令 $y=f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$，

求导得 $f'(x)=\cos x+\cos 2x+\cos 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$

$=\cos x(1-2\sin^2 x)+\cos 2x(1+\cos x)=(1+2\cos x)\cos 2x$，

当 $x\in[0,\pi]$ 时，由 $f'(x)=0$ 解得 $x=\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4}$

由于 $f(0)=0, f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{2}, f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}, f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{2}>0, f(\pi)=0$，

结合图像，只有C选项满足.

故选：C

7．答案：B。详解： 因为点 E、F 分别为 BC 和 CD 的中点，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2=4$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2$，

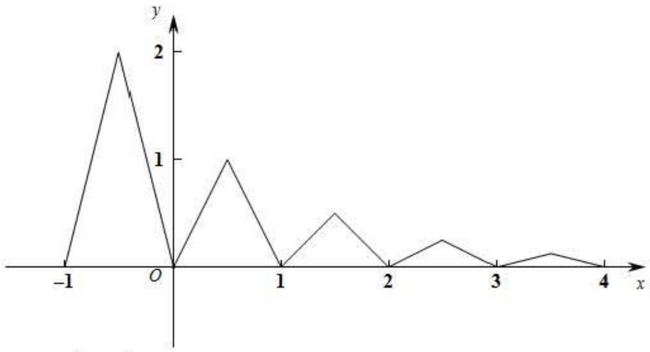
又 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})=\frac{3}{2}$，所以选 B。

8. 答案：B。详解：由题意，当 $x\in[1,2)$ 时，故 $f(x)=\frac{1}{2}f(x-1)=\frac{1}{2}(1-|2x-3|)$，

当 $x\in[2,3)$ 时，故 $f(x)=\frac{1}{2}f(x-1)=\frac{1}{4}(1-|2x-5|)\cdots$，

可得在区间 $[n,n+1)(n\in Z)$ 上，$f(x)=\frac{1}{2^n}[1-|2x-(2n+1)|]\le\frac{1}{2^n}$，

所以当 $n\ge4$ 时，$f(x)\le\frac{3}{32}$，作函数 $y=f(x)$ 的图象，如图所示，



当 $x\in\left[\frac{7}{2},4\right)$ 时，由 $f(x)=\frac{1}{8}(1-|2x-7|)=\frac{3}{32},|2x-7|=\frac{1}{4},x=\frac{29}{8}$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 答案：AC

A、根据分层抽样，抽取 25 人作为样本，则抽取的样本中男生有 $25\times\frac{320}{500}=16$，A 正确

B、样本学生的身高均值 $\frac{320}{500}\times174+\frac{180}{500}\times164=170.4$，B 错误

C、抽取的样本的方差为 $\frac{320}{500}\times[16+(174-170.4)^2]+\frac{180}{500}\times[30+(164-170.4)^2]=44.08$；C 正确

D、因为抽样中未按比例进行分层抽样，所以总体中每个个体被抽到的可能性不完全相同，因而样本的代表性差，所以作为总体的估计不合适. D 错误。

10. 答案 ABD

详解：由 $|f(x_1)-f(x_2)|=2$，故 $f(x_1)$，$f(x_2)$ 必有一个最大值和一个最小值，

则 $|x_1-x_2|_{\min}$ 为半个周期长度 $\frac{T}{2}=\pi$，A 正确；

由题意 $f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$ 的图象关于 y 轴对称，B 正确；

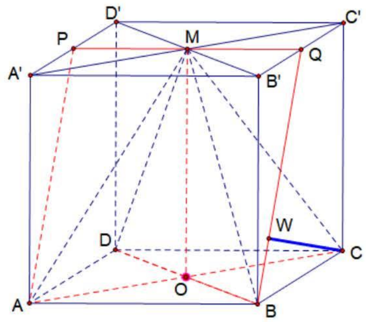
$y=\sin^2(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1-\cos(2x+\frac{\pi}{2})}{2}=\frac{1+\sin 2x}{2}$ 的最小正周期为 π， C 错误。

$f(\omega x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$，在 $x\in[0,\pi]$ 上 $\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4}\right]$ 有且仅在 3 个零点，结合正弦函数的性质知：

$3\pi\le\omega x+\frac{\pi}{4}<4\pi$，则 $\frac{11}{4}\le\omega<\frac{15}{4}$，D 正确；

故选：ABD.

11． 答案 BD



详解：补体为长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$.如图,在 $Rt\Delta BCW$ 中,WC 为 CD 到平面 ABM 距离,容易求出其距离为 $\frac{3\sqrt{10}}{5}$，A 错误；

根据投影向量概念知：向量 $\overrightarrow{AM}$ 在向量 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影向量为向量 $\overrightarrow{AO}$.即为 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,所以 B 正确；

由等体积求内切球半径

得：$V_{M-ABCD}=\frac{1}{3}S_{正方形ABCD}\cdot OM=\frac{1}{3}S_{四棱锥M-ABCD表面积}\cdot R$,

$$R=\frac{S_{正方形ABCD}\cdot OM}{S_{四棱锥M-ABCD表面积}}=\frac{4\times 3}{4+4\times(\frac{2\times\sqrt{10}}{2})}=\frac{\sqrt{10}-1}{3}$$,所以 C 错误；

连接 CQ，可知 $\angle BQC$ 是所求二面角的平面角，在 ΔBQC 中由余弦定理知道：$\cos\angle BQC=\frac{4}{5}$，D 正确。

故选：BD

12. 答案：AC

详解：依题意，有 $\ln x_n=1-\frac{a_n}{x_n^n}$，且 $\frac{1}{x_n}=\frac{na_n}{x_n^{n+1}}$，解得 $x_n=e^{1-\frac{1}{n}}$，$a_n=\frac{e^{n-1}}{n}$，

显然 $e^{1-\frac{1}{n}}<e$，即 $x_n<e$，故 A 正确；

构造函数 $f(x)=\frac{e^{x-1}}{x}$，则 $f'(x)=\frac{(x-1)e^{x-1}}{x^2}$，显然当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$f'(x)\ge 0$，即 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调

递增，从而$\{a_n\}$为递增数列，又$a_1=1$，故$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n\geq 1$，易知B错误；

易知$y_n=1-\dfrac{1}{n}$，需证$(1-\dfrac{1}{n})\cdot e^{\frac{1}{n}}<1$，只需证$1-\dfrac{1}{n}<e^{-\frac{1}{n}}(n\in\mathbf{N}^*)$，

令$x=-\dfrac{1}{n}$，则$x\in[-1,0)$，只需证$1+x<e^x$，$x\in[-1,0)$，

令$g(x)=e^x-x-1$，$x\in[-1,0]$，则$g'(x)=e^x-1\leq 0$，

易知$g(x)$单调递减，故当$x\in[-1,0)$时，$g(x)>g(0)=0$，从而C正确；

由$\dfrac{x_n}{x_{n+1}}=\dfrac{e^{1-\frac{1}{n}}}{e^{1-\frac{1}{n+1}}}=e^{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}<1$，可知$0<x_n<x_{n+1}$，即$\{x_n\}$为正项递增数列，

$\{a_n\}$亦为正项递增数列，故数列$\{x_na_n\}$为正项递增数列，又$p<p+q$，易知D错误；

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 答案：40. 详解：设$(x-\dfrac{2}{x})^5$的通项T_{k+1}，则$T_{k+1}=C_5^kx^{5-k}\left(-2x^{-1}\right)^k$，化简得$T_{k+1}=C_5^k\cdot(-2)^k\cdot x^{5-2k}$，

令$k=2$，则x的系数为$C_5^2\left(-2\right)^2=40$.

14. 答案：150

详解：第一类：仅要好的两位女生去同一景点$C_5^3A_3^3=60$；第二类：要好的两位女生和另一位同学去同一景点$C_5^1C_3^1C_4^2=90$，总方法数为$60+90=150$。

15. 答案：16

详解：设直线PQ直线方程为:$x=my+1$

$$\begin{cases}x=my+1\\y^2=4x\end{cases},y^2=4my+4,y_1+y_2=4m,y_1y_2=-4$$

$$|PQ|=x_1+1+x_2+1=\frac{y_1^2}{4}+\frac{y_2^2}{4}+2=\frac{1}{4}\left[(y_1+y_2)^2-2y_1y_2\right]+2$$

$$=\frac{1}{4}\left[16m^2+8\right]+2=4m^2+4$$

$$|MN|=\frac{4}{m^2}+4$$

$$|PQ|+|MN|=(4m^2+4)+(\frac{4}{m^2}+4)=4(m^2+\frac{1}{m^2})+8\geq 16$$

另解：设直线PQ倾斜角为θ，$|PQ|+|MN|=\dfrac{4}{\sin^2\theta}+\dfrac{4}{\cos^2\theta}=\dfrac{4}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\dfrac{16}{\sin^2 2\theta}\geq 16$，所以最小

值为 16。

16. 答案（1）4 （2）2^{d-1}（可以通过举例归纳得到，如 S_4）。

详解：（1）略；（2）易知 S_m 中仅有一组 $(0,0,0,\cdots,0)$；S_{m+1} 中深度 $d=1$ 的数组仅 1 组 $(1,1,1,\cdots,1)$；S_{m+2} 中深度 $d=2$ 的数组仅 2 组；S_{m+3} 中深度 $d=3$ 的数组仅 4 组；$\cdots$；S_{m+k} 中深度 $d=k$ 的数组仅 2^{k-1} 组；$\cdots$；所以 S_n 中深度为 d 的数组仅有 2^{d-1} 组。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 答案：（1）$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ------------------------5 分

（2）由 $\dfrac{2}{n(n+1)}=2(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$，--------------------7 分

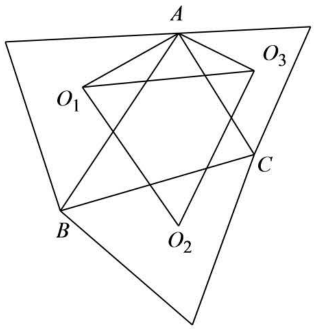
所以 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=2(1-\dfrac{1}{n+1})<2$ ---------------------10 分

18. 答案(1) $10\left(\sin\dfrac{B+C}{2}\right)^2=7-\cos 2A$，则 $5\big(1-\cos(B+C)\big)=7-\cos 2A$，-------------2 分

故 $5(1+\cos A)=8-2\cos^2 A$，所以 $2\cos^2 A+5\cos A-3=0$，

可得 $\cos A=\dfrac{1}{2}$，由 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$． ---5 分

(2) 如图，连接 AO_1，AO_3，则 $|AO_1|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}c$，$|AO_3|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}b$，



正 $\triangle O_1O_2O_3$ 面积 $S=\dfrac{1}{2}\cdot|O_1O_3|^2\cdot\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{4}|O_1O_3|^2=\dfrac{7\sqrt{3}}{4}$，$\therefore|O_1O_3|^2=7$，

而 $\angle BAC=60°$，则 $\angle O_1AO_3=120°$，---7 分

在 $\triangle O_1AO_3$ 中，由余弦定理得：$|O_1O_3|=|AO_1|^2+|AO_3|^2-2|AO_1|\cdot|AO_3|\cdot\cos\angle O_1AO_3$，

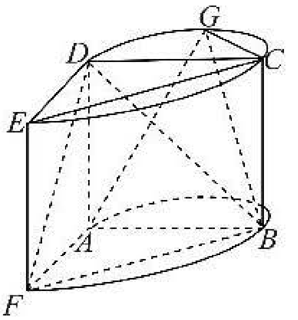
即 $7=\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{3}-2\cdot\frac{bc}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$，则 $b^2+c^2+bc=21$，

在 $\triangle ABC$ 中，$A=60°$，$a=3$，由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle BAC$，

则 $b^2+c^2-bc=9$，$\therefore bc=6$，$b^2+c^2=15$，--10 分

$\therefore b+c=\sqrt{b^2+c^2+2bc}=3\sqrt{3}$，所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $3+3\sqrt{3}$. ----------------------------12 分

19. 答案：（1）连接 EC，如图所示：



若点 G 为半圆弧 CD 的中点，则 $\angle ECD=\angle GCD=45°$，

所以 $\angle ECG=90°$，即 $EC\perp CG$，　---2 分

因为 $BF\parallel EC$，

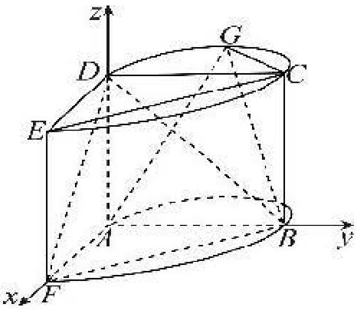
所以 $BF\perp CG$，又 $BF\perp BC$，$BC\cap CG=C$，BC，$CG\subset$面 BCG，

所以 $BF\perp$ 平面 BCG，$BF\subset$平面 BFD，　则平面 $BFD\perp$ 平面 BCG。----------------------------5 分

（2）假设存在点 G，使得直线 CF 与平面 BCG 所成的角为 60°，

以 A 为原点，$\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 方向为 x，y，z 轴正方向建立空间直角坐标系，

如图所示：



则 $F(4,0,0)$，$B(0,4,0)$，$C(0,4,4)$，设 $\angle GCD=\theta$，$\theta\in[0,\frac{\pi}{2})$，------------7 分

则 $G(-4\sin\theta\cos\theta,\ 4-4\cos^2\theta,\ 4)$，

所以 $\overrightarrow{CF}=(4,-4,4)$，$\overrightarrow{BC}=(0,0,4)$，$\overrightarrow{BG}=(-4\sin\theta\cos\theta,\ -4\cos^2\theta,\ 4)$，

设平面 BCG 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases} z=0 \\ -4x\sin\theta\cos\theta-4y\cos^2\theta=0 \end{cases}$，

令$y=\sin\theta$，则$x=-\cos\theta$，　即$\vec{m}=(-\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$，------------------------9 分

依题意$|\cos\langle\overrightarrow{CF},\ \vec{m}\rangle|=\left|\dfrac{-4\cos\theta-4\sin\theta}{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}\right|=\dfrac{|\sin\theta+\cos\theta|}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

整理得$\sin 2\theta=\dfrac{5}{4}$，与$\sin 2\theta\in[0,1]$矛盾，所以不存在——————————12 分

另解：连接DG，可知$DG\perp$面BCG，所以$\overrightarrow{DG}=(-4\sin\theta\cos\theta,4\sin^2\theta,0)$，即$\vec{m}=(-\cos\theta,\sin\theta,0)$

是平面BCG的一个法向量（下同）。

20. 答案：（1）由对称性可知：$|BF_2|=|AF_1|$，故$|AF_1|=2|AF_2|$，

由双曲线定义可知：$|AF_1|-|AF_2|=2a$，即$2|AF_2|-|AF_2|=|AF_2|=2a$，所以$|AF_1|=4a$，——2 分

又因为$|F_1F_2|=2c$，

在$\triangle AF_1F_2$中，由余弦定理得：$\cos\angle F_1AF_2=\dfrac{|F_1A|^2+|F_2A|^2-|F_1F_2|^2}{2|F_1A|\cdot|F_2A|}=\dfrac{1}{2}$，

即$\dfrac{16a^2+4a^2-4c^2}{2\times4a\times2a}=\dfrac{20a^2-4c^2}{16a^2}=\dfrac{1}{2}$，解得：$c=\sqrt{3}a$，

故离心率为$\dfrac{c}{a}=\sqrt{3}$.——————————————————————5 分

（2）因为双曲线过点$(\sqrt{3},2)$，所以双曲线方程：$x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$

当直线l的斜率不存在时，则$PQ\perp F_1F_2,|OP|=2,|OQ|=2,|OP||OQ|=4\neq4\sqrt{10}$

$\therefore$直线l的斜率不存在时不成立.——————————————————8 分

当直线l的斜率存在时，设直线l的方程为$y=kx+m$，$P(x_1,y_1)\,Q(x_2,y_2)$

又点O到直线l　距离$d=\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$，$\therefore|m|=\sqrt{2}\sqrt{k^2+1},m^2=2(k^2+1)$，

联立$\begin{cases} y=kx+m \\ 2x^2-y^2-2=0 \end{cases}$，消去$y$得$(2-k^2)x^2-2kmx-m^2-2=0\left(k\neq\pm\sqrt{2}\right)$，

则 $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2km}{2-k^2} \\ x_1x_2=\dfrac{m^2+2}{k^2-2} \end{cases}$

由 ΔOPQ 的面积为 $2\sqrt{10}$，即 $\sqrt{2}\,|PQ|=4\sqrt{10}$，$\therefore |PQ|=4\sqrt{5}$，------------------------10 分

$|PQ|=\sqrt{k^2+1}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{k^2+1}\sqrt{\dfrac{8(m^2-k^2+2)}{(2-k^2)^2}}$

将 $m^2=2\left(k^2+1\right)$ 代入上式得 $|PQ|=\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{k^2+1}\sqrt{k^2+4}}{\left|2-k^2\right|}=4\sqrt{5}$，

$\therefore \begin{cases} k^2=1 \\ m^2=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} k^2=4 \\ m^2=10 \end{cases}$，即 $\begin{cases} k=\pm 1 \\ m=\pm 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} k=\pm 2 \\ m=\pm\sqrt{10} \end{cases}$.

$\therefore$ 直线 l 的方程为：$y=\pm x\pm 2$ 或 $y=\pm 2x\pm\sqrt{10}$ --12 分

21．解：（1）$f'(x)=\dfrac{p[(1-p)x+m]}{x(px-m)}$. --2 分

由题意得 $f'(4)=0$ 且 $f(4)=-\ln 2$，即 $4(1-p)+m=0$，$\ln(4p-m)-p\ln 4=-\ln 2$，联立解得 $p=\dfrac{3}{2}$，$m=2$. 经检验，符合题意。--5 分

（2）方法一：$f(x)$ 定义域是 $\left(\dfrac{m}{p},+\infty\right)$. 由条件知，$p>1$.

当 $x\in\left(\dfrac{m}{p},\dfrac{m}{p-1}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in\left(\dfrac{m}{p-1},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

故 $x_0=\dfrac{m}{p-1}$ 是 $f(x)$ 的极大值点，且极大值为 $f(x_0)=(1-p)\ln\dfrac{m}{p-1}$. ------------------------7 分

当 $m=p-1$ 时，$f(x_0)=0$，此时 $f(x)$ 有一个零点. --8 分

当 $m<p-1$ 时，$f(x_0)>0$. 记 $m_1=\dfrac{pm^{p-1}}{p^p+m^{p-1}}$，则 $0<m_1<1$. 取 $x_1=\dfrac{m}{p-m_1}$，则 $\dfrac{m}{p}<x_1<\dfrac{m}{p-1}$，

$f(x_1)=p\ln\dfrac{m}{p}-p\ln\dfrac{mp^p+m^p}{p^{p+1}}=p\ln\dfrac{p^p}{p^p+m^{p-1}}<0$，根据零点存在定理，当 $x\in\left(\dfrac{m}{p},\dfrac{m}{p-1}\right)$ 时，存在一个零点. --10 分

取 $x_2=p^{\frac{1}{p-1}}$，则 $x_2>\dfrac{m}{p-1}$，$f(x_2)=\ln(px_2-m)-p\ln x_2<\ln(px_2)-p\ln x_2=\ln 1=0$. 由零点存在

定理可知，当 $x\in\left(\frac{m}{p-1},+\infty\right)$ 时，存在一个零点．故此时 $f(x)$ 有两个零点.

综上所述，当 $m=p-1$ 时，$f(x)$ 只有一个零点；当 $m<p-1$ 时，$f(x)$ 有两个零点.------------12 分

方法二：由题意，函数 $f(x)$ 的零点即方程 $f(x)=0$ 的根，

即方程 $\ln(px-m)=\ln x^{p}$ 的根，---7 分

即 $m=px-x^{p}$ 的根，记 $g(x)=px-x^{p}$，$x\in(\frac{m}{p},+\infty)$，答案：

由 $g'(x)=p-px^{p-1}=p(1-x^{p-1})=0$，得到 $x=1>\frac{m}{p}$，当 $x\in(\frac{m}{p},1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

$x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，---9 分

又 $g(\frac{m}{p})=m-(\frac{m}{p})^{p}<m$，因为 $p>1$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)=px-x^{p}\to-\infty$，

综上所述，当 $m=p-1$ 时，$f(x)$ 只有一个零点；当 $m<p-1$ 时，$f(x)$ 有两个零点---------12 分

22． **解**：(1) 设 X 表示扔一非均匀骰子点数，则

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

---3 分

扔一次平均得到的信息量为

$$\begin{aligned}H(X)&=-\sum_{i=1}^{6}p(X=x_i)\log_2 p(X=x_i)\\&=\sum_{i=1}^{6}\frac{i}{21}\log_2\frac{21}{i}\\&=\log_2 21-\frac{1}{21}\sum_{i=1}^{6}i\log_2 i\\&=\log_2 7+\frac{4}{7}\log_2 3-\frac{5}{21}\log_2 5-\frac{16}{21}\\&\approx 2.40.\end{aligned}$$

---------------------------------------5 分

(2) ① 由全概率公式，得

$$\begin{aligned}p(Y=0)&=p(X=0)P(Y=0\,|\,X=0)+p(X=1)P(Y=0\,|\,X=1)\\&=\omega(1-p)+(1-\omega)p,\end{aligned}$$

--------------------------------7 分

②由题意，$p(Y=0\,|\,X=0)=p(Y=1\,|\,X=1)=1-p$．所以，

$$\begin{aligned}&H(Y\,|\,X)\\&=-[p(X=x_1,Y=x_1)\log_2 p(Y=x_1\,|\,X=x_1)+p(X=x_1,Y=x_2)\log_2 p(Y=x_2\,|\,X=x_1)\\&\quad+p(X=x_2,Y=x_1)\log_2 p(Y=x_1\,|\,X=x_2)+p(X=x_2,Y=x_2)\log_2 p(Y=x_2\,|\,X=x_2)]\\&=-[p(X=x_1)p(Y=x_1\,|\,X=x_1)\log_2 p(Y=x_1\,|\,X=x_1)\\&\quad+p(X=x_1)p(Y=x_2\,|\,X=x_1)\log_2 p(Y=x_2\,|\,X=x_1)\\&\quad+p(X=x_2)p(Y=x_1\,|\,X=x_2)\log_2 p(Y=x_1\,|\,X=x_2)\\&\quad+p(X=x_2)p(Y=x_2\,|\,X=x_2)\log_2 p(Y=x_2\,|\,X=x_2)]\\&=-[\omega(1-p)\log_2(1-p)+\omega p\log_2 p+(1-\omega)p\log_2 p+(1-\omega)(1-p)\log_2(1-p)]\\&=-p\log_2 p-(1-p)\log_2(1-p).\end{aligned}$$

---------9 分

其中 $x_1=0, x_2=1$。

令 $f(p)=-p\log_2 p-(1-p)\log_2(1-p)$

$$f'(p)=-\left[\log_2 p+p\frac{1}{p\ln 2}\right]-\left[-\log_2(1-p)+(1-p)\frac{-1}{(1-p)\ln 2}\right]$$

$$=-\log_2 p+\log_2(1-p)=\log_2\frac{1-p}{p}$$

$f'(p)=0, p=\frac{1}{2}, x\in(0,\frac{1}{2})$ 时，$f'(p)>0, x\in(\frac{1}{2},1)$ 时，$f'(p)<0$.

$f(p)_{\max}=f(\frac{1}{2})=1$ --12 分