赣州市 2023 年高三年级适应性考试

数学(理科)参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	C	A	B	C	A	C	A	D	D	B

二、填空题

13．78.5；　　14．2；　　15．$\frac{7}{6}$；　　16．$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$．

三、解答题

17．解：（1）由正弦定理得 $3\sin B\cos C=\sin A+3\sin C\cos B$ ……1 分

又 $\sin A=\sin(B+C)$，所以 $3\sin B\cos C=\sin B\cos C+\cos B\sin C+3\sin C\cos B$ ……2 分

整理得 $\sin B\cos C=2\sin C\cos B$ ……3 分

所以 $\tan B=2\tan C$ ……4 分

故 $\frac{\tan B}{\tan C}=2$ ……5 分

（2）由 $\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}$ 得，$\sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，于是 $\tan A=3$ ……6 分

又 $\tan A=-\tan(B+C)=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}$，再结合（1）得 $2\tan^2 C-\tan C-1=0$ ……7 分

解得 $\tan C=-\frac{1}{2}$（舍去）或 $\tan C=1$ ……8 分

法一：所以 $\tan B=1$，从而 $B=45°$，$\sin C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ……9 分

于是由正弦定理得 $b=\frac{2\sqrt{2}}{3}a$ ……10 分

由 $\frac{1}{2}ab\sin C=2$ 得 $ab=4\sqrt{2}$ ……11 分

所以 $a=\sqrt{6}$ ……12 分

法二：过 A 作 $AD\perp BC$，垂足为 D，设 $AD=h$，则 $CD=\frac{h}{\tan C}=h, BD=\frac{h}{\tan B}=\frac{h}{2}$ ……9 分

从而 $a=BC=\frac{3}{2}$　

由 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ah=2$ 得，$\frac{1}{2}\times\frac{2a}{3}\times a=2$，即 $a=\sqrt{6}$ ……12 分

18．（1）证明：因为面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$AB\perp AD$ ……1 分

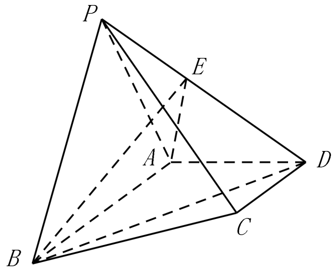
所以 $AD\perp$ 平面 PAB ……2 分

所以 $PB\perp AD$，又因为 $PB\perp PA$，所以 $PB\perp$ 平面 PAD ……4 分

而 $PB\subset$ 平面 PBC，所以平面 $PBC\perp$ 平面 PAD ……6 分

（2）由（1）知，$PB\perp PA$，$PB\perp PD$，所以$\angle APD$是二面角$D-PB-A$的平面角，

由已知得$\tan\angle APD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 公众号：网课来了



在等腰直角三角形$\triangle PAB$中，由$AB=2$可得$PA=\sqrt{2}$，

在$\mathrm{Rt}\triangle PAD$中，由$\tan\angle APD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 可得$AD=1$……………8分

法一：因为$PB\perp$平面PAD，所以平面$PBD\perp$平面PAD，

过A作$AE\perp PD$，垂足为E，则$AE\perp$平面PBD……………9分

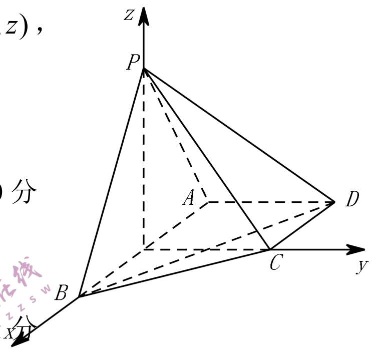
连接BE，则$\angle ABE$是AB与平面PBD所成的角…………10分

在$\mathrm{Rt}\triangle PAD$中，可得$AE=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，在$\mathrm{Rt}\triangle PAD$中，$\sin\angle ABE=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ ……………11分

而$AB/\!/CD$，故直线CD与平面PBD所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$……………12分

法二：如图建立空间直角坐标系，则$B(1,0,0),P(0,0,1),D(-1,1,0),C(0,1,0)$ ……………9分

$\overrightarrow{PB}=(1,0,-1),\overrightarrow{BD}=(-2,1,0)$，设平面$PBD$的法向量$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，



由$\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}=0\\\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$得$\begin{cases}x-z=0\\2x-y=0\end{cases}$，令$x=1$，

则$\boldsymbol{n}=(1,2,1)$……………10分

$\overrightarrow{DC}=(1,0,0)$，设直线$CD$与平面$PBD$所成角为$\theta$，

则$\sin\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{DC}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ ……………11分

故直线CD与平面PBD所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$……………12分

19．解：（1）$\bar{x}=6.5\times0.02+7.5\times0.09+8.5\times0.22+9.5\times0.33+10.5\times0.24+11.5\times0.08$ $+12.5\times0.02=9.5$……………2分

$s^2=9\times0.02+4\times0.09+1\times0.22+0\times0.33+1\times0.24+4\times0.08+9\times0.02=1.5$ ……………4分

（2）①因为$P(X\geqslant\mu-2\sigma)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times0.9544=0.9772$……………6分

所以$a=\mu-2\sigma=7.06$……………7分

②记这500件零件中质量指标不小于7.06的件数为Y，

则$Y\sim B(500,0.9772)$……………8分

假设$P(Y=k)$最大，则由$\begin{cases}P(Y=k)\geqslant P(Y=k-1)\\P(Y=k)\geqslant P(Y=k+1)\end{cases}$……………9分

即$\begin{cases}C_{500}^{k}\times0.9772^{k}\times0.0228^{500-k}\geqslant C_{500}^{k-1}\times0.9772^{k-1}\times0.0228^{501-k}\\C_{500}^{k}\times0.9772^{k}\times0.0228^{500-k}\geqslant C_{500}^{k+1}\times0.9772^{k+1}\times0.0228^{499-k}\end{cases}$，

解得$488.62\leqslant k\leqslant489.58$……………10分

所以$k=489$……………11分

故这 500 件零件中质量指标不少于 7.06 的件数最有可能是 489 件……………………12 分

20．（1）解：$g(x)=\dfrac{e^{x-1}}{x}+\ln x-x(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}(e^{x-1}-x)$ ……………………1 分

记 $G(x)=e^{x-1}-x$，则 $G'(x)=e^{x-1}-1$，当 $x\in(0,1)$ 时，$G'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$G'(x)>0$．于是 $G(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增，所以 $G(x)\geqslant G(1)=0$ ………3 分

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$ ……………………………4 分

故 $y=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增……………………………………5 分

（2）记 $h(x)=f(x)-ax-1$，则 $h(1)=0$ ……………………………………………6 分

假设存在 a，使 $h(x)\geqslant 0$，即 $h(x)\geqslant h(1)$，

于是 $h(1)$ 是函数 $h(x)$ 的最小值，所以 $h'(1)=0$ ……………………………………7 分

$h'(x)=e^{x-1}-\ln x-1+2ax-a$，由 $h'(1)=0$ 得 $a=0$ ……………………………8 分

由（1）知，$e^{x-1}\geqslant x$，从而 $\ln x\leqslant x-1$ ……………………………………9 分

于是 $h'(x)=e^{x-1}-\ln x-1\geqslant x-(x-1)-1=0$ ………………………………10 分

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，故当 $x\in(0,1)$ 时，$h(x)<h(1)=0$，不合题意……………11 分

综上，不存在实数 a，使 $f(x)\geqslant ax+1$ 成立…………………………………………12 分

21．解（1）①当 $2\theta\neq 0$ 时，在 ΔPF_1F_2 由余弦定理得

$|F_1F_2|^2=(|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|(1+\cos 2\theta)$ ……………………………1 分

所以 $4=(|PF_1|+|PF_2|)^2-4|PF_1|\cdot|PF_2|\cos^2\theta=(|PF_1|+|PF_2|)^2-8$

所以 $|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{3}$ ………………………………………………………2 分

②当 $2\theta=0$ 时，点 P 在 x 轴上，不妨设点 P 在 x 轴的正半轴上，则 $|PF_1|-|PF_2|=2$，

$|PF_1|\cdot|PF_2|=2$，由 $|PF_1|+|PF_2|=\sqrt{(|PF_1|-|PF_2|)^2+4|PF_1|\cdot|PF_2|}=2\sqrt{3}$ ………3 分

综上，$|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{3}$ …………………………………………………………4 分

因为 $|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{3}>|F_1F_2|$，所以 P 的轨迹是以 F_1,F_2 为焦点且长轴长为 $2\sqrt{3}$ 的椭圆，

$a=\sqrt{3},c=1,b=\sqrt{2}$，故 P 的轨迹 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ ……………………………5 分

（2）设 l 的方程为 $x=my-1$，代入 E 的方程得 $(2m^2+3)y^2-4my-4=0$

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\dfrac{4m}{2m^2+3},y_1y_2=-\dfrac{4}{2m^2+3}$ ……………………6 分

由 B 关于原点 O 的对称点为点 C，知 $C(-x_2,-y_2)$

直线 AF_2 和 CF_1 的方程为 $x=m_1y+1$，$x=m_2y-1$，其中 $m_1=\dfrac{x_1-1}{y_1},m_2=\dfrac{x_2-1}{y_2}$

由 $m_1y+1=m_2y-1$ 得 $y=\dfrac{2}{m_2-m_1}$ ……………………………………………7 分

从而 $x=\dfrac{m_2+m_1}{m_2-m_1}$，所以 $T(\dfrac{m_2+m_1}{m_2-m_1},\dfrac{2}{m_2-m_1})$ ………………………………8 分

所以直线 OT 的斜率 $k=\dfrac{2}{m_1+m_2}$ ……………………………………………………9 分

而 $m_2+m_1=\dfrac{2my_1y_2-2(y_2+y_1)}{y_1y_2}=2m-\dfrac{2(y_2+y_1)}{y_1y_2}=4m$ ………………………………10 分

所以 $k=\dfrac{1}{2m}$， **公众号：网课来了**

则直线 l 的斜率和直线 OT 的斜率的倒数之和的绝对值为 $|\dfrac{1}{m}+2m|=|\dfrac{1}{m}|+2|m|\geqslant 2\sqrt{2}$

当 $|\dfrac{1}{m}|=2|m|$ 即 $m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，取“＝”号……………………………………………………11 分

故直线 l 的方程为 $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}y-1$ ……………………………………………………………12 分

22．解：（1）C 的普通方程为 $x^2+y^2-2y=0(y\geqslant 1)$ ……………………………………………………2 分

由 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 得，C 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta(\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{3\pi}{4})$（或

$\rho=2\sin\theta(\rho\geqslant\sqrt{2})$）(注：未标注范围扣 1 分……………………………………………………5 分

（2）设 $M(\rho,\theta)$，则 $P(\rho',\theta)$，且 $\rho'=2\sin\theta(\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{3\pi}{4})$ ………………………………6 分

由 $|OP|\cdot|OM|=4$ 得 $\rho\cdot\rho'=4$，所以 $\rho\sin\theta=2(\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{3\pi}{4})$ ……………………………8 分

即 $y=2(-2\leqslant x\leqslant 2)$ ……………………………………………………………………………………9 分

故点 M 的轨迹的直角方程为 $y=2(-2\leqslant x\leqslant 2)$．(注：未标注范围扣 1 分）…………10 分

23. 解：（1）由 $f(x)=|x-1|+2|x+5|=\begin{cases}-3x-9, x\leqslant -5\\ x+11, -5<x\leqslant 1\\ 3x+9, x>1\end{cases}$ ………………………………3 分

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-5)$ 递减，在 $(-5,+\infty)$ 递增………………………………………………4 分

故 $f(x)$ 的最小值为 $f(-5)=6$ …………………………………………………………………………5 分

（2）若 $(a+b)(a-b)\geqslant 0$，则 $|a+b|+|a-b|=|(a+b)+(a-b)|=2|a|<6$ ……………7 分

若 $(a+b)(a-b)<0$，则 $|a+b|+|a-b|=|(a+b)-(a-b)|=2|b|<6$ ……………………9 分

因此，$|a+b|+|a-b|<6$，而 $f(x)\geqslant 6$，

故 $|a+b|+|a-b|<f(x)$ ………………………………………………………………………10 分