雅礼中学2021届高三月考试卷(五)

数　学

命题人:张博　审题人:陈朝阳

得分:______________

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共8页。时量120分钟。满分150分。

第Ⅰ卷

一、单项选择题:本大题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合$A=\{x|-2\leqslant x<4\}$,$B=\{x|-5<x\leqslant 3\}$,则$A\cap B=$

A. $\{x|-5<x<4\}$　　B. $\{x|-5<x\leqslant -2\}$

C. $\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$　　D. $\{x|3\leqslant x<4\}$

2. 设$z_1=3-4i$,$z_2=-2+3i$,则z_1+z_2在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 从5名同学中选若干名分别到图书馆、食堂做志愿者,若每个地方至少去2名,则不同的安排方法共有

A. 20种　　B. 50种　　C. 80种　　D. 100种

4. 党的十九大报告中指出:从2020年到2035年,在全面建成小康社会的基础上,再奋斗15年,基本实现社会主义现代化.若到2035年底我国人口数量增长至14.4亿,由2013年到2019年的统计数据可得国内生产总值(GDP)y(单位:万亿元)关于年份代号x的回归方程为$\hat{y}=6.60x+50.36$($x=1,2,3,4,5,6,7$),由回归方程预测我国在2035年底人均国内生产总值(单位:万元)约为

A. 14.04万元　　B. 202.16万元　　C. 13.58万元　　D. 14.50万元

5. 随着网络技术的发达,电子支付变得愈发流行,若电子支付只包含微信支付和支付宝支付两种.某群体中的成员只用现金支付的概率为0.45,既用现金支付也用非现金支付的概率为0.15,则不用现金支付的概率为

A. 0.3　　B. 0.4　　C. 0.6　　D. 0.7

6. 牛顿冷却定律描述一个物体在常温环境下的温度变化：如果物体的初始温度为 T_0，则经过一定时间 t 后的温度 T 将满足 $T-T_a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}\cdot(T_0-T_a)$，其中 T_a 是环境温度，h 称为半衰期. 现有一杯 85 ℃的热茶，放置在 25 ℃的房间中，如果热茶降温到 55 ℃，需要 10 分钟，则欲降温到 45 ℃，大约需要多少分钟？（$\lg 2\approx0.3010$，$\lg 3\approx0.4771$）

A. 12　　B. 14　　C. 16　　D. 18

7. 在直角三角形 ABC 中，$\angle A=90°$，$AB=2$，$AC=4$，P 在△ABC 斜边 BC 的中线 AD 上，则 $\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最大值为

A. $\frac{25}{8}$　　B. $\frac{5}{2}$　　C. $\frac{25}{4}$　　D. $\frac{25}{2}$

8. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，且对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+2)=f(2-x)+4f(2)$，若函数 $y=f(x+1)$ 的图象关于点 $(-1,0)$ 对称，且 $f(1)=3$，则 $f(2021)=$

A. 6　　B. 3　　C. 0　　D. -3

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.

9. 如果 a、b、c 满足 $c<b<a$，且 $ac<0$，那么下列选项成立的是

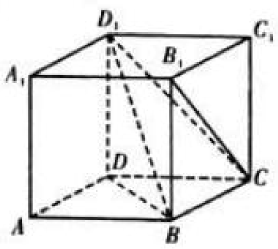
A. $ab>ac$　　B. $cb^2<ab^2$

C. $c(b-a)>0$　　D. $ac(a-c)<0$

10. 已知方程 $x^2+y^2+3ax+ay+\frac{5}{2}a^2+a-1=0$，若方程表示圆，则 a 的值可能为

A. -2　　B. 0　　C. 1　　D. 3

11. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，下列结论正确的是



A. 异面直线 BD_1 与 B_1C 所成的角大小为 90°

B. 四面体 D_1DBC 的每个面都是直角三角形

C. 二面角 D_1-BC-B_1 的大小为 30°

D. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的内切球上一点与外接球上一点的距离的最小值为 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

12. 在现代社会中，信号处理是非常关键的技术，我们通过每天都在使用的电话或者互联网就能感受得到. 而信号处理背后的"功臣"就是正弦型函数. 函数 $f(x)=\sum_{i=1}^{4}\frac{\sin[(2i-1)x]}{2i-1}$ 的图象就可以近似地模拟某种信号的波形，则

A. 函数 $f(x)$ 为周期函数，且最小正周期为 π

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2\pi,0)$ 对称

C. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称

D. 函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的最大值为 4

选择题答题卡

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	得分
答 案													

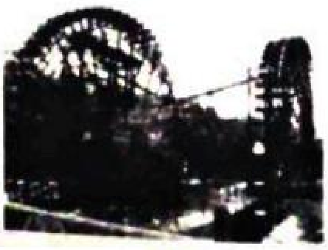
第Ⅱ卷

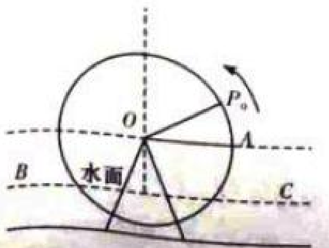
三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$，直线 $l:y=2x+b$ 经过抛物线 C 的焦点，且与 C 相交于 A、B 两点. 若 $|AB|=5$，则 $p=$________.

14. 数列 1，−2，2，−3，3，−3，4，−4，4，−4，5，−5，5，−5，5，…的项正负交替，且项的绝对值为 1 的有 1 个，2 的有 2 个，…，n 的有 n 个，则该数列第 2021 项是________.

15. 筒车是我国古代发明的一种水利灌溉工具，因其经济又环保，至今还在农业生产中得到使用，如左下图. 假定在水流量稳定的情况下，半径为 3 m 的筒车上的每一个盛水桶都按逆时针方向作角速度为 $\frac{\pi}{3}$ rad/min 的匀速圆周运动，平面示意图如右下图，已知筒车中心 O 到水面 BC 的距离为 2 m，初始时刻其中一个盛水筒位于点 P_0 处，且 $\angle P_0OA=\frac{\pi}{6}$（$OA/\!/BC$），则 8 min 后该盛水筒到水面的距离为________m.





16. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，E，F 分别为 BC，CC_1 的中点，则平面 AEF 截正方体所得的截面面积为________；以点 E 为球心，$\frac{\sqrt{10}}{4}$ 为半径的球面与对角面 ACC_1A_1 的交线长为________.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

在①$\sin B+\sqrt{3}\cos B=2$，②$\cos 2B+\sqrt{3}\cos B-2=0$，③$b^2-a^2=c^2-\sqrt{3}ac$ 这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并进行解答.

问题：已知△ABC 的三边 a，b，c 所对的角分别为 A，B，C，若 $a=4$，$c=\sqrt{3}b$，__________，求△ABC 的面积.

18.（本小题满分 12 分）

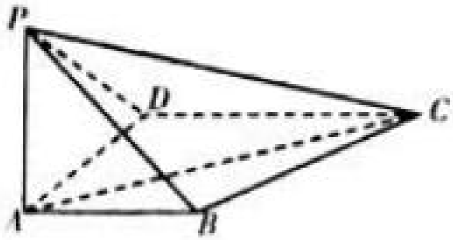
已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n^2\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=(-1)^n(a_n+a_{n+1})$，求数列$\{b_n\}$的前 2020 项和 S_{2020}.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$平面 $ABCD$，$PA=AB=1$，$BC=CD=2$，$AB//CD$，$\angle ADC=\frac{\pi}{2}$.



(1)求证：$PD\perp AB$；

(2)求直线 AC 与平面 PBC 所成角的正弦值.

20.（本小题满分 12 分）

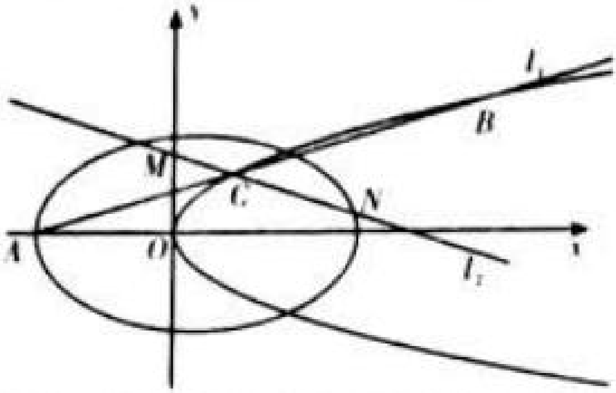
在 2019 年女排世界杯中，中国女子排球队以 11 连胜的优异战绩成功夺冠，为祖国母亲七十华诞献上了一份厚礼. 排球比赛采用 5 局 3 胜制，前 4 局比赛采用 25 分制，每个队只有赢得至少 25 分，并同时超过对方 2 分时，才胜 1 局；在决胜局（第五局）采用 15 分制，每个队只有赢得至少 15 分，并领先对方 2 分为胜. 在每局比赛中，发球方赢得此球后可得 1 分，并获得下一球的发球权，否则交换发球权，并且对方得 1 分. 现有甲、乙两队进行排球比赛：

(1)若前三局比赛中甲已经赢两局，乙赢一局. 接下来两队赢得每局比赛的概率均为$\frac{1}{2}$，求甲队最后赢得整场比赛的概率；

(2)若前四局比赛中甲、乙两队已经各赢两局比赛. 在决胜局（第五局）中，两队当前的得分为甲、乙各 14 分，且甲已获得下一发球权. 若甲发球时甲赢 1 分的概率为$\frac{2}{5}$，乙发球时甲赢 1 分的概率为$\frac{3}{5}$，得分者获得下一个球的发球权. 设两队打了 $x(x\leqslant 6)$ 个球后甲赢得整场比赛，求 x 的取值及相应的概率 $p(x)$.

21.（本小题满分 12 分）

如图，点 A 为椭圆 $C_1: x^2+2y^2=1$ 的左顶点，过 A 的直线 l_1 交抛物线 $C_2: y^2=2px(p>0)$ 于 B，C 两点，点 C 是 AB 的中点.



(1) 若点 A 在抛物线 C_2 的准线上，求抛物线 C_2 的标准方程；

(2) 若直线 l_2 过点 C，且倾斜角和直线 l_1 的倾斜角互补，交椭圆 C_1 于 M，N 两点.

(ⅰ) 证明：点 C 的横坐标是定值，并求出该定值；

(ⅱ) 当 $\triangle BMN$ 的面积最大时，求 p 的值.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=ae^x+2x-1$.（其中常数 $e=2.71828\cdots$，是自然对数的底数）

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2) 证明：对任意的 $a\geq 1$，当 $x>0$ 时，$f(x)\geq (x+ae)x$.

雅礼中学2021届高三月考试卷(五)

数学参考答案

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	C	D	B	A	B	C	B	D

1. C 【解析】因为集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x<4\}$，$B=\{x\mid -5<x\leqslant 3\}$，
所以 $A\cap B=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$. 故选 C.

2. D 【解析】由题 $z_1=3-4\mathrm{i}$，$z_2=-2+3\mathrm{i}$，则 $z_1+z_2=1-\mathrm{i}$，对应点为 $(1,-1)$.

3. B 【解析】当去4个人时，安排方法有 $C_5^3C_1^1=30$ 种，当去5个人时，安排方法有 $C_5^3C_2^1=20$ 种. 综上，不同的安排方法共有50种. 故选 B.

4. A 【解析】到2035年底对应的年份代号为23，由回归方程 $\hat{y}=6.60x+50.36$ 得，我国国内生产总值约为 $6.60\times23+50.36=202.16$（万亿元），又 $\frac{202.16}{14.4}\approx14.04$，所以到2035年底我国人均国内生产总值约为14.04万元. 故选 A.

5. B 【解析】设事件 A 为只用现金支付，事件 B 为只用非现金支付，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)+P(AB)$.
因为 $P(A)=0.45$，$P(AB)=0.15$，所以 $P(B)=0.4$. 故选 B.

6. C 【解析】根据题意有：$55-25=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{h}}(85-25)\Rightarrow h=10$，

$\therefore 45-25=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}(85-25)\Rightarrow\frac{t}{10}=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}\Rightarrow t=10\times\frac{\lg 3}{\lg 2}=10\times\frac{0.4771}{0.3010}\approx15.85$，故选 C.

7. B 【解析】以 A 为坐标原点，以 AB，AC 方向分别为 x 轴，y 轴正方向建立平面直角坐标系，
则 $B(2,0)$，$C(0,4)$，中点 $D(1,2)$，
设 $P(x,2x)$，所以 $\overrightarrow{AP}=(x,2x)$，$\overrightarrow{PD}=(1-x,2-2x)$，
$\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=\overrightarrow{AP}\cdot(2\overrightarrow{PD})=2[x(1-x)+2x(2-2x)]=-10(x^2-x)$，
$x=\frac{1}{2}$ 时，最大值为 $\frac{5}{2}$.
故选 B.

8. D 【解析】令 $x=0$，得 $f(2)=f(2)+4f(2)$，即 $f(2)=0$，$f(x+2)=f(2-x)$，
因为函数 $y=f(x+1)$ 的图象关于点 $(-1,0)$ 对称，
所以函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称，
即 $f(-x)=-f(x)$，
所以 $f(x+2)=f(2-x)=-f(x-2)$，
即 $f(x+4)=-f(x)$，$f(x+8)=f(x)$，
则 $f(2021)=f(253\times8-3)=f(-3)=-f(1)=-3$，故选 D.

二、多项选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得3分.

题　号	9	10	11	12
答　案	ACD	AB	ABD	BCD

9. ACD 【解析】依题意 a,b,c 满足 $c<b<a$，且 $ac<0$，所以 $c<0$，$a>0$，
由 $\begin{cases}c<b,\\a>0\end{cases}\Rightarrow ca<ab$，所以 A 选项正确.
当 $b=0$ 时，$cb^2=ab^2$，所以 B 选项错误.
$\begin{cases}b-a<0,\\c<0\end{cases}\Rightarrow c(b-a)>0$，所以 C 选项正确.
$\begin{cases}a-c>0,\\ac<0\end{cases}\Rightarrow ac(a-c)<0$，所以 D 选项正确.
故选 ACD.

10. AB 【解析】因为方程 $x^2+y^2+3ax+ay+\frac{5}{2}a^2+a-1=0$ 表示圆，
所以 $(3a)^2+a^2-4\left(\frac{5}{2}a^2+a-1\right)>0$，
解得 $a<1$，

所以满足条件的只有-2与0.

故选AB.

11. ABD 【解析】连接BC_1，易知$BC_1\perp B_1C$，又正方体中$C_1D_1\perp$平面BCC_1B_1，

从而有$C_1D_1\perp B_1C$，$C_1D_1\cap BC_1=C_1$，$B_1C\perp$平面BD_1C_1，

从而得$B_1C\perp BD_1$，异面直线BD_1与B_1C所成的角大小为$90°$，A正确；

正方体中$DD_1\perp$平面$ABCD$，则$DD_1\perp BD$，$DD_1\perp CD$，

同理$BC\perp CD$，$BC\perp CD_1$，

∴四面体D_1DBC的四个面都是直角三角形，B正确；

由$BC\perp CD_1$，$BC\perp CC_1$，知$\angle D_1CC_1$是二面角D_1-BC-B_1的平面角，

为$45°$，即二面角D_1-BC-B_1为$45°$，C错误；

易知BD_1的中点是正方体外接球和内切球的球心，

又外接球半径为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，内切球半径为$\frac{1}{2}$，

∴内切球上一点与外接球上一点的距离的最小值为$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，D正确.

故选ABD.

12. BCD 【解析】∵$f(x)=\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}$，

$f(x+\pi)=\sin(x+\pi)+\frac{\sin[3(x+\pi)]}{3}+\frac{\sin[5(x+\pi)]}{5}+\frac{\sin[7(x+\pi)]}{7}=-\sin x-\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 5x}{5}$

$-\frac{\sin 7x}{7}=-f(x)\neq f(x)$，

所以，π不是函数$y=f(x)$的最小正周期，A选项错误；

∵$f(-x)=\sin(-x)+\frac{\sin(-3x)}{3}+\frac{\sin(-5x)}{5}+\frac{\sin(-7x)}{7}=-\sin x-\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 5x}{5}-\frac{\sin 7x}{7}$，

$f(4\pi+x)=\sin(x+4\pi)+\frac{\sin[3(x+4\pi)]}{3}+\frac{\sin[5(x+4\pi)]}{5}+\frac{\sin[7(x+4\pi)]}{7}$

$=\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}$，

所以$f(4\pi+x)+f(-x)=0$，故函数$f(x)$的图象关于点$(2\pi,0)$对称，B选项正确；

∵$f(\pi-x)=\sin(\pi-x)+\frac{\sin[3(\pi-x)]}{3}+\frac{\sin[5(\pi-x)]}{5}+\frac{\sin[7(\pi-x)]}{7}$

$=\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}=f(x)$，

所以，函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{2}$对称，C选项正确；

$f'(x)=\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x$，

∵$-1\leqslant\cos x\leqslant 1$，$-1\leqslant\cos 3x\leqslant 1$，$-1\leqslant\cos 5x\leqslant 1$，$-1\leqslant\cos 7x\leqslant 1$，

则$f'(x)=\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x\leqslant 4$，又$f'(0)=4$，

所以函数$y=f'(x)$的最大值为4，D选项正确.

故选BCD.

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 2 【解析】法1：由题意知，直线l：$y=2x+b$，即$y=2\left(x+\frac{b}{2}\right)$.

∵直线l经过抛物线C：$y^2=2px(p>0)$的焦点，

∴$-\frac{b}{2}=\frac{p}{2}$，即$b=-p$.

∴直线l的方程为$y=2x-p$.

设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，联立$\begin{cases}y=2x-p,\\y^2=2px,\end{cases}$消去$y$整理可得$4x^2-6px+p^2=0$，

由韦达定理得$x_1+x_2=\frac{3p}{2}$，又$|AB|=5$，

∴$x_1+x_2+p=\frac{5}{2}p=5$，则$p=2$.

法2：设直线的倾斜角为θ，则$\tan\theta=k=2$，得$\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

∴$|AB|=\frac{2p}{\sin^2\theta}=\frac{2p}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=5$，得$p=2$.

14. 64 【解析】将绝对值相同的数字分为一组，则每组数字个数构成等差数列$a_n=n$，

因为$\frac{n(n+1)}{2}\leqslant 2021\Rightarrow n\leqslant 63\Rightarrow\frac{63\times 64}{2}=2016$，

则前 2021 项共包含 63 个完整组，且第 63 组最后一个数字为第 2016 项，
故 2021 项为第 64 组第 5 个数字，由奇偶项正负交替规律，其为 64.

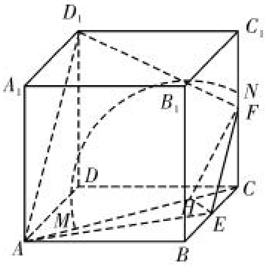
15. $\frac{7}{2}$ 【解析】根据题意可得，8 分钟后盛水桶所转过的角为$\frac{\pi}{3}\times 8=\frac{8\pi}{3}$，

而除去一圈，$\frac{8\pi}{3}-2\pi=\frac{2\pi}{3}$，

所以转 8 分钟之后 P_0 所转到的位置 P 满足$\angle POA=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$，

所以点 P 到水面的距离 $d=2+3\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{7}{2}$ m.

16. $\frac{9}{8}$　$\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$ 【解析】如图，连接 AD_1，则 $EF//BC_1//AD_1$，



∴等腰梯形 $AEFD_1$ 为平面 AEF 截正方体所得截面图形，

由正方体棱长为 1，得 $AD_1=\sqrt{2}$，$EF=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$AE=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，则 E 到 AD_1 的

距离为$\sqrt{\frac{5}{4}-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

$\therefore S_{AEFD_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\right)\times\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{9}{8}$.

∵平面 $AA_1C_1C\perp$平面 $ABCD$，且平面 $AA_1C_1C\cap$平面 $ABCD=AC$，
过 E 作 $EH\perp AC$ 于 H，则 $EH\perp$平面 ACC_1A_1，

∵E 为 BC 中点，∴$EH=\frac{1}{4}AC=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

以点 E 为球心，$\frac{\sqrt{10}}{4}$为半径的球面与对角面 ACC_1A_1 的交线为圆弧，

其半径为$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

由 $CH=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$HN=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得$\angle NHC=\frac{\pi}{3}$，∴$\angle MHN=\frac{2\pi}{3}$，

所求交线为劣弧 MN，长度为$\frac{2\pi}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】选①：由 $\sin B+\sqrt{3}\cos B=2$ 得：$\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=1$，又 $B\in(0,\pi)$，

所以 $B=\frac{\pi}{6}$. ………………………………………………………………………… 3 分

选②：由 $\cos 2B+\sqrt{3}\cos B-2=0$ 得：$2\cos^2 B+\sqrt{3}\cos B-3=0$，

解得 $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{6}$. ……………………………………………… 3 分

选③：由 $b^2-a^2=c^2-\sqrt{3}ac$ 得：$c^2+a^2-b^2=\sqrt{3}ac$，

得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{3}ac}{2ac}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{6}$. ……………………………… 3 分

又因为$\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{c}{b}=\sqrt{3}$，所以 $\sin C=\sqrt{3}\sin B=\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$或 $C=\frac{2\pi}{3}$. ……………………………………………………… 6 分

当 $C=\frac{\pi}{3}$时，$A=\frac{\pi}{2}$，又因为 $a=4$，

所以 $b=2$，$c=2\sqrt{3}$.

所以面积 $S=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$. ……………………………………………………… 8 分

当 $C=\frac{2\pi}{3}$时，$A=\frac{\pi}{6}$，所以 $A=B$.

又因为 $a=4$，所以 $b=4$.

所以面积 $S=\frac{1}{2}\times 4\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$. …………………………………………………… 10 分

18.【解析】(1) 由 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n^2\ (n\in\mathbf{N}^*)$，
可得 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=(n-1)^2$，
所以 $na_n=n^2-(n-1)^2=2n-1$， ………………………………………………………… 3 分

即 $a_n=2-\frac{1}{n}(n\geqslant 2,n\in \mathbf{N}^*)$，当 $n=1,a_1=1$ 也满足，

所以 $a_n=2-\frac{1}{n}(n\in \mathbf{N}^*)$. …… 6 分

(2) $S_{2020}=b_1+b_2+\cdots+b_{2020}$

$=-\left(2-\frac{1}{1}+2-\frac{1}{2}\right)+\left(2-\frac{1}{2}+2-\frac{1}{3}\right)+\cdots-\left(2-\frac{1}{2019}+2-\frac{1}{2020}\right)+\left(2-\frac{1}{2020}+2-\frac{1}{2021}\right)$

$=1-\frac{1}{2021}=\frac{2020}{2021}$. …… 12 分

19.【解析】(1)由 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，得 $PA\perp AB$，

由 $\angle ADC=\frac{\pi}{2}$，得 $AD\perp CD$，…… 2 分

$\because AB/\!/CD,\therefore AD\perp AB$，…… 3 分

$\because AD\cap PA=A,\therefore AB\perp$ 平面 PAD，

$\because PD\subset$ 平面 $PAD,\therefore PD\perp AB$. …… 5 分

(2)以射线 AB,AD,AP 为 x,y,z 轴的正半轴，建立空间直角坐标系.

则 $A(0,0,0),B(1,0,0),D(0,\sqrt{3},0),P(0,0,1),C(2,\sqrt{3},0)$，

$\overrightarrow{AC}=(2,\sqrt{3},0),\overrightarrow{PB}=(1,0,-1),\overrightarrow{PC}=(2,\sqrt{3},-1)$. …… 7 分

设平面 PBC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.

则由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x-z=0,\\ 2x+\sqrt{3}y-z=0.\end{cases}$ …… 9 分

取 $\boldsymbol{n}=\left(1,-\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$，则 $|\cos\langle\overrightarrow{AC},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{7}$. …… 11 分

故直线 AC 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{7}$. …… 12 分

20.【解析】(1)甲队最后赢得整场比赛的情况为第四局赢或第四局输第五局赢，

所以甲队最后赢得整场比赛的概率为 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$. …… 4 分

(2)根据比赛规则，x 的取值只能为 2,4 或 6，对应比分为 16∶14,17∶15,18∶16.

两队打了 2 个球后甲赢得整场比赛，即打第一个球甲发球甲得分，打第二个球甲发球甲得分，此时概率为 $p(2)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$； …… 6 分

两队打了 4 个球后甲赢得整场比赛，即打第一个球甲发球甲得分，打第二个球甲发球甲失分，打第三个球乙发球甲得分，打第四个球甲发球甲得分，或打第一个球甲发球甲失分，打第二个球乙发球甲得分，打第三个球甲发球甲得分，打第四个球甲发球甲得分，此时概率为 $p(4)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{72}{625}$. …… 8 分

两队打了 6 个球后甲赢得整场比赛，6 个球的胜负情况如图(胜者用√表示)，

	1	2	3	4	5	6
甲	√			√	√	√
乙		√	√			

	1	2	3	4	5	6
甲	√		√		√	√
乙		√		√		

	1	2	3	4	5	6
甲		√		√	√	√
乙	√		√			

	1	2	3	4	5	6
甲		√	√		√	√
乙	√			√		

$p(6)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}$
$\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{1116}{15625}$. ………………………… 12 分

21.【解析】(1)由题意得 $A(-1,0)$, ………………………… 1 分

点 A 在抛物线 C_2 的准线上,

则 $\frac{p}{2}=1$,即 $p=2$, ………………………… 2 分

所以抛物线 C_2 的标准方程为 $y^2=4x$. ………………………… 3 分

(2)(ⅰ)证明:因为过 A 的直线 l_1 和抛物线交于两点,

所以 l_1 的斜率存在且不为 0,

设 l_1 的方程为 $x=my-1$,其中 m 是斜率的倒数, ………………………… 4 分

设 $B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,

联立方程组 $\begin{cases}x=my-1,\\ y^2=2px,\end{cases}$

整理得 $y^2-2pmy+2p=0$,$\Delta>0$ 且 $\begin{cases}y_1+y_2=2pm,\\ y_1y_2=2p,\end{cases}$ ………………………… 5 分

因为 C 是 AB 的中点,所以 $y_1=2y_2$,

所以 $y_2=\frac{2pm}{3}$,$m^2=\frac{9}{4p}$,

$x_2=m\cdot\frac{2pm}{3}-1=\frac{2p}{3}m^2-1=\frac{1}{2}$,

所以点 C 的横坐标为定值. ………………………… 6 分

(ⅱ)因为直线 l_2 的倾斜角和直线 l_1 的倾斜角互补,

所以 l_2 的斜率和 l_1 的斜率互为相反数.

设直线 l_2 的方程为 $x=-m\left(y-\frac{2pm}{3}\right)+\frac{1}{2}$,$M(x_M,y_M)$,$N(x_N,y_N)$,

即 $x=-my+2$,

联立方程组 $\begin{cases}x=-my+2,\\ x^2+2y^2-1=0,\end{cases}$ 整理得 $(m^2+2)y^2-4my+3=0$,

$\Delta=(4m)^2-12(m^2+2)=4m^2-24>0$,

所以 $m^2>6$,$y_M+y_N=\frac{4m}{m^2+2}$,$y_My_N=\frac{3}{m^2+2}$. ………………………… 8 分

因为点 C 是 AB 中点,所以 $S_{\triangle BMN}=S_{\triangle AMN}$,

因为 $A(-1,0)$ 到 MN 的距离 $d=\frac{|-2-1|}{\sqrt{1+m^2}}$,

$MN=\sqrt{1+m^2}\,|y_M-y_N|$,

所以 $S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}|MN|\cdot d=3\sqrt{\frac{m^2-6}{(m^2+2)^2}}$. ………………………… 10 分

令 $t=m^2-6$,

则 $S_{\triangle AMN}=3\sqrt{\frac{t}{t^2+16t+64}}=3\sqrt{\frac{1}{t+\frac{64}{t}+16}}\leqslant3\sqrt{\frac{1}{2\times8+16}}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$,

当且仅当 $t=8$,$m^2=14$ 时等号成立,

所以 $14=\frac{9}{4p}$,

$p=\frac{9}{56}$. ………………………… 12 分

22.【解析】(1)$f'(x)=ae^x+2$.

①当 $a\geqslant0$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增; ………………………… 2 分

②当 $a<0$ 时,由 $f'(x)>0$ 解得 $x<\ln\left(-\frac{2}{a}\right)$,由 $f'(x)<0$ 解得 $x>\ln\left(-\frac{2}{a}\right)$.

故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\left(-\frac{2}{a}\right)\right)$ 上单调递增,在 $\left(\ln\left(-\frac{2}{a}\right),+\infty\right)$ 上单调递减. ………………………… 4 分

综上所述,当 $a\geqslant0$ 时,$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

当 $a<0$ 时,$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\left(-\frac{2}{a}\right)\right)$ 上单调递增,在 $\left(\ln\left(-\frac{2}{a}\right),+\infty\right)$ 上单调递减.

(2)证法一:原不等式等价于 $\frac{e^x}{x}-\frac{x}{a}-\frac{1}{ax}+\frac{2}{a}-e\geqslant0$. ………………………… 6 分

令 $g(x)=\frac{e^x}{x}-\frac{x}{a}-\frac{1}{ax}+\frac{2}{a}-e$,则 $g'(x)=\frac{(x-1)(ae^x-x-1)}{ax^2}$.

当 $a\geqslant1$ 时，$ae^x-x-1\geqslant e^x-x-1$， ………………………………………… 8 分
令 $h(x)=e^x-x-1$，则当 $x>0$ 时，$h'(x)=e^x-1>0$，
∴当 $x>0$ 时，$h(x)$ 单调递增，即 $h(x)>h(0)=0$， ………………………………………… 9 分
∴当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$；当 $x=1$ 时，$g'(x)=0$；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，
∴$g(x)\geqslant g(1)=0$. ………………………………………… 11 分
即 $\frac{e^x}{x}-\frac{x}{a}-\frac{1}{ax}+\frac{2}{a}-e\geqslant0$，故 $f(x)\geqslant(x+ae)x$. ………………………………………… 12 分
证法二：原不等式等价于 $a(e^x-ex)\geqslant(x-1)^2$.
令 $g(x)=e^x-ex$，则 $g'(x)=e^x-e$.
当 $x<1$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$.
∴$g(x)\geqslant g(1)=0$，即 $e^x-ex\geqslant0$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立. ………………………………………… 6 分
当 $x=1$ 时，$a(e^x-ex)\geqslant(x-1)^2$ 显然成立；
当 $x>0$ 且 $x\neq1$ 时，$e^x-ex\geqslant0$.
欲证对任意的 $a\geqslant1$，$a(e^x-ex)\geqslant(x-1)^2$ 成立，只需证 $e^x-ex\geqslant(x-1)^2$. ………………………………………… 8 分
思路 1：∵$x>0$，∴不等式 $e^x-ex\geqslant(x-1)^2$ 可化为 $\frac{e^x}{x}-x-\frac{1}{x}-e+2\geqslant0$，
令 $h(x)=\frac{e^x}{x}-x-\frac{1}{x}-e+2$，则 $h'(x)=\frac{(x-1)(e^x-x-1)}{x^2}$， ………………………………………… 10 分
易证当 $x>0$ 时，$e^x-x-1>0$，
∴当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，
∴函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，
∴$h(x)_{\min}=h(1)=0$，
∴$h(x)\geqslant0$，即 $\frac{e^x}{x}-x-\frac{1}{x}-e+2\geqslant0$，
从而，对任意的 $a\geqslant1$，当 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant(x+ae)x$. ………………………………………… 12 分
思路 2：令 $\varphi(x)=\frac{(x-1)^2+ex}{e^x}$，则 $\varphi'(x)=\frac{-(x-1)(x+e-3)}{e^x}$.
$\varphi'(x)>0\Rightarrow3-e<x<1$，$\varphi'(x)<0\Rightarrow x>1$ 或 $0<x<3-e$， ………………………………………… 10 分
∴$\varphi(x)$ 在 $(0,3-e)$ 上单调递减，在 $(3-e,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.
∵$\varphi(0)=\varphi(1)=1$，
∴$\varphi(x)=\frac{(x-1)^2+ex}{e^x}\leqslant1$，即 $(x-1)^2\leqslant e^x-ex$.
从而，对任意的 $a\geqslant1$，当 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant(x+ae)x$. ………………………………………… 12 分
证法三：原不等式等价于 $ae^x+2x-1-x^2-aex\geqslant0$.
令 $g(x)=ae^x-x^2-(ae-2)x-1$，则 $g'(x)=ae^x-2x-(ae-2)$.
令 $h(x)=ae^x-2x-(ae-2)$，则 $h'(x)=ae^x-2$，其中 $x>0$. ………………………………………… 6 分
①当 $a\geqslant2$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.
注意到 $h(1)=0$，故当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)=h(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)=h(x)>0$.
∴$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.
∴$g(x)_{\min}=g(1)=0$，即 $f(x)\geqslant(x+ae)x$. ………………………………………… 8 分
②当 $1\leqslant a<2$ 时，$0<\ln\left(\frac{2}{a}\right)<1$.
当 $0<x<\ln\left(\frac{2}{a}\right)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x>\ln\left(\frac{2}{a}\right)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增.
(ⅰ)若 $\frac{2}{e-1}\leqslant a<2$，则 $h(0)=a(1-e)+2\leqslant0$.
∵$h\left(\ln\frac{2}{a}\right)<h(1)=0$，
∴当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)=h(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)=h(x)>0$.
与①同，不等式成立. ………………………………………… 10 分
(ⅱ)若 $1\leqslant a<\frac{2}{e-1}$，则 $h(0)=a(1-e)+2>0$，
∵$h\left(\ln\frac{2}{a}\right)<h(1)=0$，
∴$\exists x_0\in\left(0,\ln\left(\frac{2}{a}\right)\right)$，使得 $h(x_0)=0$，且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)=h(x)>0$；
当 $x\in(x_0,1)$ 时，$g'(x)=h(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)=h(x)>0$.
∴$g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.
∵$g(0)=a-1\geqslant0$，$g(1)=0$，
∴此时，$g(x)\geqslant0$，即 $f(x)\geqslant(x+ae)x$.
综上所述，结论得证. ………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’ 专业、专注、有态度 ‘’ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。