2023届广州市高三年级调研测试

数学试题参考答案及评分标准

评分说明：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则．
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．
3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．
4. 只给整数分数．选择题不给中间分．

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	B	C	A	B	C	A

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

9. ABD　　10. AC　　11. AD　　12. BCD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13. 2　　14. 2，$(-1,-1)$　　15. $\left(\dfrac{4}{e^2},+\infty\right)$　　16. $\dfrac{1}{3}$

说明：第14题第一空2分，第二空3分

四、解答题：本题共6小题，共70分．

17．（10分）

（1）解法1：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由$S_6=4S_3, a_{2n}=2a_n+1$得

$$\begin{cases}6a_1+15d=12a_1+12d,\\a_1+(2n-1)d=2a_1+2(n-1)d+1.\end{cases}$$ ……………………2分

解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=2.\end{cases}$ ……………………4分

所以$a_n=1+2(n-1)=2n-1$． ……………………5分

解法2：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由$S_6=4S_3, a_{2n}=2a_n+1$得

$$\begin{cases}6a_1+15d=12a_1+12d,\\a_2=2a_1+1.\end{cases}$$ ……………………2分

解得 $\begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 2. \end{cases}$ ……………………………4 分

所以 $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$. ……………………………5 分

（2）**解法 1**：由（1）得 $b_n = (2n-1)\times 2^{n-1}$，

$T_n = 1\times 2^0 + 3\times 2^1 + 5\times 2^2 + \cdots + (2n-3)\times 2^{n-2} + (2n-1)\times 2^{n-1}$， ① …………6 分

$2T_n = 1\times 2^1 + 3\times 2^2 + \cdots + (2n-3)\times 2^{n-1} + (2n-1)\times 2^n$， ② …………7 分

①−② 得 $-T_n = 1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - (2n-1)\times 2^n$ ……………………8 分

$$= 1 + \frac{2^2 - 2^n \times 2}{1-2} - (2n-1)\times 2^n$$

$= (3-2n)\times 2^n - 3$ ……………………………9 分

所以 $T_n = (2n-3)\cdot 2^n + 3$. ……………………………10 分

解法 2：由（1）得 $b_n = (2n-1)\times 2^{n-1}$，

因为 $b_n = (2n-3)\times 2^n - (2n-5)\times 2^{n-1}$. ………………7 分

则 $T_n = \left[(-1)\times 2^1 - (-3)\times 2^0\right] + \left[1\times 2^2 - (-1)\times 2^1\right] + \cdots + \left[(2n-3)\times 2^n - (2n-5)\times 2^{n-1}\right]$

……………………………8 分

$= -(-3)\times 2^0 + (2n-3)\times 2^n$， ……………………………9 分

所以 $T_n = (2n-3)\times 2^n + 3$. ……………………………10 分

18.（12 分）

（1）由 $2\sin A = 3\sin 2C$ 得 $2\sin A = 3\times 2\sin C\cos C$，即 $\sin A = 3\sin C\cos C$，…1 分

由正弦定理和余弦定理得 $a = 3c\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$， ……………………………3 分

又 $c = 2b$，解得 $a = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}b$. ……………………………4 分

所以 $\cos C = \dfrac{\sin A}{3\sin C} = \dfrac{a}{3c} = \dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{2}b}{6b} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. ……………………………5 分

（或由 $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \dfrac{\frac{3}{2}b^2}{3\sqrt{2}b^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$）

又$C\in(0,\pi)$，所以$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$. ……………………………6 分

（2）解：因为△ABC的面积为$\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$， ……………………7 分

所以$ab=6\sqrt{2}$. ……………………8 分

又$a=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}b$，$c=2b$，所以$b=2$，$c=4,a=3\sqrt{2}$. ……………………9 分

下面提供几种解法求CD：

解法1：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{8}$， ……………………10 分

又$AD=\dfrac{1}{2}AB=2$，

在△ACD中，$CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cdot\cos A=7$， ……………………11 分

所以$CD=\sqrt{7}$. ……………………12 分

解法2：延长CD至E，使得$CD=DE$，连AE，则四边形$ACBE$是平行四边形.

$\cos\angle EAC=\cos(\pi-\angle ACB)=-\cos\angle ACB=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$， ……………………10 分

在△ACE中，$CE^2=AC^2+AE^2-2AC\cdot AE\cdot\cos\angle EAC=28$， ……………11 分

得$CE=2\sqrt{7}$，

所以$CD=\sqrt{7}$. ……………………12 分

解法3：因为$\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$， ……………………10 分

所以$|CD|^2=\overrightarrow{CD}^2=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})^2=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{CA}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}^2)$

$=\dfrac{1}{4}(2^2+2\times2\times3\sqrt{2}\cos\angle ACB+(3\sqrt{2})^2)=7$. ……………………11 分

所以$CD=\sqrt{7}$. ……………………12 分

19.（12 分）

（1）证明：设AC交BE于G，连接FG，

因为$AE\,//\,BC$，且$AE=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}BC$，

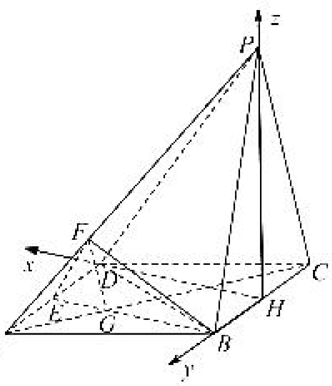
所以△AEG∽△CBG，所以$\dfrac{AG}{GC}=\dfrac{1}{2}$， …1 分

又$AP=3AF$，所以$\dfrac{AF}{FP}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{AG}{GC}$. ……2 分

所以$GF\,//\,PC$. ……………………3 分

又$GF\subset$平面BEF，$PC\not\subset$平面BEF，

所以$PC\,//$平面BEF. ……………………4 分



（2）解：因为$\angle ACD=30^\circ$，得$\angle BCD=60^\circ$，又$BC=CD$，则△BCD为正三角形.

又 $\angle PDC = \angle PDB$， $DB = DC$，

所以 $\triangle PDB \cong \triangle PDC$，所以 $PB = PC$． ……………………5 分

取 BC 中点 H，则 $PH \perp BC$． ……………………6 分

又平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PBC \cap$ 平面 $ABCD = BC$，

所以 $PH \perp$ 平面 $ABCD$． ……………………7 分

所以 PD 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle PDH = 45°$． ……………………8 分

设 $BC = 2$，连 DH，则 $DH = PH = \sqrt{3}$．

如图所示，以 H 为坐标原点， HD， HB， HP 所在直线分别为 x 轴， y 轴， z 轴

建立空间直角坐标系 $H - xyz$，

则 $D(\sqrt{3},0,0)$， $B(0,1,0)$， $P(0,0,\sqrt{3})$， $E(\sqrt{3},1,0)$， $A(\sqrt{3},2,0)$，

从而由 $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AP} = (-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{2}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$，得 $F(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{4}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$， ……………………9 分

所以 $\overrightarrow{AE} = (0,-1,0)$， $\overrightarrow{BE} = (\sqrt{3},0,0)$， $\overrightarrow{BF} = (\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{1}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$．

设平面 AEF 的法向量 $\boldsymbol{n}_1 = (x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases} \overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}_1 = 0, \\ \overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}_1 = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -y_1 = 0, \\ -\frac{\sqrt{3}}{3}x_1 - \frac{2}{3}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}z_1 = 0. \end{cases}$

取 $x_1 = 1$，则 $z_1 = 1$，故 $\boldsymbol{n}_1 = (1,0,1)$． ……………………10 分

设平面 BEF 的法向量 $\boldsymbol{n}_2 = (x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases} \overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}_2 = 0, \\ \overrightarrow{BF}\cdot\boldsymbol{n}_2 = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \sqrt{3}x_2 = 0, \\ \frac{2\sqrt{3}}{3}x_2 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}z_2 = 0, \end{cases}$

取 $z_2 = 1$，则 $y_2 = -\sqrt{3}$，故 $\boldsymbol{n}_2 = (0,-\sqrt{3},1)$． ……………………11 分

所以 $\cos < \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2 > = \frac{1}{\sqrt{2}\times 2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$．

所以平面 AEF 与平面 BEF 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$． ……………………12分

20.（12 分）

（1）解法 1：设“从这三个社区中随机抽取1名居民，该居民每周运动总时间超过5小时”为事件M，N_1,N_2,N_3分别表示所抽取的1名居民来自A,B,C社区.

依题意得 $P(N_1)=\dfrac{5}{5+6+9}=\dfrac{1}{4}$，$P(N_2)=\dfrac{6}{5+6+9}=\dfrac{3}{10}$，$P(N_3)=\dfrac{9}{5+6+9}=\dfrac{9}{20}$． ……3 分

故$P(M)=P(N_1)P(M|N_1)+P(N_2)P(M|N_2)+P(N_3)P(M|N_3)$ ……………………4 分

$$=\frac{1}{4}\times 56\%+\frac{3}{10}\times 65\%+\frac{9}{20}\times 70\%=\frac{13}{20}.$$ ………………………………6 分

解法 2：设“从这三个社区中随机抽取1名居民，该居民每周运动总时间超过5小时”为事件M，这三个社区的居民人数为n.

三个社区每周运动总时间超过5小时的人数为：

$$\frac{5}{20}n\times 0.56+\frac{6}{20}n\times 0.65+\frac{9}{20}n\times 0.7,$$ ………………………………3 分

故 $P(M)=\dfrac{\frac{5}{20}n\times 0.56+\frac{6}{20}n\times 0.65+\frac{9}{20}n\times 0.7}{n}$ ………………………………4 分

$$=\frac{1}{4}\times 0.56+\frac{3}{10}\times 0.65+\frac{9}{20}\times 0.7=\frac{13}{20}.$$ ………………………………6 分

（2）解：由（1）知$P(X>5)=\dfrac{13}{20}$， ………………………………………7 分

因为$X\sim N(5.5,\sigma^2)$，

则$P(5\le X\le 6)=\left(\dfrac{13}{20}-\dfrac{1}{2}\right)\times 2=\dfrac{3}{10}$. ………………………………………8 分

设η为抽取的3名居民中每周运动总时间为5小时至6小时的人数，

依题意得$\eta\sim B\left(3,\dfrac{3}{10}\right)$. ……………………………………………………9 分

故$P(\eta=2)+P(\eta=3)=C_3^2(\dfrac{3}{10})^2\times(\dfrac{7}{10})+(\dfrac{3}{10})^3=\dfrac{27}{125}$. ……………………11 分

所以至少有两名居民每周运动总时间为5小时至6小时的概率为$\dfrac{27}{125}$. …………12分

21.（12 分）

（1）解：由题设得$p=2$， ……………………1 分

所以抛物线C的方程为$y^2=4x$. ……………………2 分

因此，抛物线的焦点为$F(1,0)$，即圆M的圆心为$M(1,0)$. ……………………3 分

5

由圆 M 与 y 轴相切，所以圆 M 半径为1.

所以圆 M 的方程为 $(x-1)^2+y^2=1$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…………………………4 分

（2）证法 1：由于 $P(x_0,y_0)(x_0\neq 2)$，每条切线都与抛物线有两个不同的交点，则 $x_0\neq 0$.

故设过点 P 且与圆 M 相切的切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，即 $kx-y+y_0-kx_0=0$.

依题意得 $\dfrac{|k+y_0-kx_0|}{\sqrt{k^2+1}}=1$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…………………………………5 分

整理得 $x_0(x_0-2)k^2-2y_0(x_0-1)k+y_0^2-1=0$. ①　　　　　　　　　…………………………6 分

设直线 PA,PQ 的斜率分别为 k_1,k_2，则 k_1,k_2 是方程①的两个实根，

故 $k_1+k_2=\dfrac{2y_0(x_0-1)}{x_0(x_0-2)},k_1\cdot k_2=\dfrac{y_0^2-1}{x_0(x_0-2)}$. ②　　　　　　　　　…………………………7 分

由 $\begin{cases}kx-y+y_0-kx_0=0,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得 $ky^2-4y+4(y_0-kx_0)=0$. ③

因为点 A,B,Q,R 的纵坐标分别为 y_1,y_2,y_3,y_4，

则 $y_1y_2=\dfrac{4(y_0-k_1x_0)}{k_1}$. ④　　$y_3y_4=\dfrac{4(y_0-k_2x_0)}{k_2}$. ⑤　　　…………………………8 分

由②，④，⑤三式得

$$y_1y_2y_3y_4=\frac{16(y_0-k_1x_0)(y_0-k_2x_0)}{k_1k_2}=\frac{16\left[y_0^2-(k_1+k_2)x_0y_0+x_0^2k_1k_2\right]}{k_1k_2}$$

$$=\frac{16\left[y_0^2-(k_1+k_2)x_0y_0\right]}{k_1k_2}+16x_0^2$$

$$=\frac{16\left[y_0^2-\dfrac{2y_0(x_0-1)}{x_0(x_0-2)}x_0y_0\right]}{\dfrac{y_0^2-1}{x_0(x_0-2)}}+16x_0^2=16.$$　　　　　　　　…………………………9 分

即 $y_0^2x_0(x_0-2)-2y_0(x_0-1)x_0y_0=(1-x_0^2)(y_0^2-1)$，　　　　…………………………10 分

即 $y_0^2x_0^2-2y_0^2x_0-2y_0^2x_0^2+2x_0y_0^2=y_0^2-x_0^2y_0^2-1+x_0^2$，即 $x_0^2+y_0^2=1$.　……11 分

所以点 P 在圆 $x^2+y^2=1$ 上.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…………………………12 分

证法 2：设切线方程为 $x-x_0=m(y-y_0)$，因为每条切线与抛物线均有两个交点，则 $y_0\neq\pm1$，

由题意得 $\dfrac{|1-x_0+my_0|}{\sqrt{m^2+1}}=1$， ……………………………………5 分

整理得 $(y_0^2-1)m^2+2y_0(1-x_0)m+x_0^2-2x_0=0$， ……………………………6 分

则 $m_1+m_2=\dfrac{2y_0(x_0-1)}{y_0^2-1}$， $m_1m_2=\dfrac{x_0^2-2x_0}{y_0^2-1}$， ……………………………7 分

由 $\begin{cases} y^2=4x, \\ x-x_0=m(y-y_0), \end{cases}$ 得 $y^2=4[m(y-y_0)+x_0]$，

化简得到 $y^2-4my+4my_0-4x_0=0$，

则 $y_1y_2=4m_1y_0-4x_0$， ……………………………8 分

同理 $y_3y_4=4m_2y_0-4x_0$， ……………………………9 分

故 $16=y_1y_2y_3y_4=(4m_1y_0-4x_0)(4m_2y_0-4x_0)$，

整理得 $m_1m_2y_0^2-x_0y_0(m_1+m_2)+x_0^2=1$， ……………………………10 分

故 $\left(\dfrac{x_0^2-2x_0}{y_0^2-1}\right)y_0^2-\dfrac{2x_0y_0^2(x_0-1)}{y_0^2-1}+x_0^2=1$，化简得 $x_0^2+y_0^2=1$， ………………11 分

故点 P 在定圆 $x^2+y^2=1$ 上. ……………………………12 分

22.（12 分）

（1）解：$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}+ex=\dfrac{a^x}{x}(x\neq 0)$， ……………………………1 分

得 $g'(x)=\dfrac{a^x(x\ln a-1)}{x^2}(x\neq 0)$. ……………………………2 分

当 $0<a<1$ 时，$\ln a<0$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{1}{\ln a}$.

当 $x>\dfrac{1}{\ln a}$ 且 $x\neq 0$ 时，$g'(x)<0$；当 $x<\dfrac{1}{\ln a}$ 时，$g'(x)>0$.

故函数 $g(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{1}{\ln a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{\ln a},0\right)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递减. ……3 分

当 $a>1$ 时，$\ln a>0$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{1}{\ln a}$.

当 $x>\dfrac{1}{\ln a}$ 时，$g'(x)>0$；当 $x<\dfrac{1}{\ln a}$ 且 $x\neq 0$ 时，$g'(x)<0$.

故函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $\left(0,\dfrac{1}{\ln a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{\ln a},+\infty\right)$ 上单调递增. …4 分

综上所述，

当 $0<a<1$ 时，函数 $g(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{1}{\ln a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{\ln a},0\right)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>1$ 时，函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $\left(0,\dfrac{1}{\ln a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{\ln a},+\infty\right)$ 上单调递增.

（2）（i）解：由 $f(0)=1\neq 0$，所以 $f(x)=0$ 等价于 $x\ln a=1+\ln x^2$，

即 $\ln a=\dfrac{1+\ln x^2}{x}$. ……………………………5 分

令 $p(x)=\dfrac{1+\ln x^2}{x},x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

因为 $p(-x)=-p(x)$，故 $p(x)$ 为奇函数， ……………………………6 分

当 $x>0$ 时，$p(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x}$，于是 $p'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^2}$，

从而当 $x\in(0,\sqrt{e})$ 时，$p'(x)>0$，$p(x)$ 单调递增；

当 $x\in(\sqrt{e},+\infty)$ 时，$p'(x)<0$，$p(x)$ 单调递减，

$p(\sqrt{e})=\dfrac{2}{\sqrt{e}}$ 为极大值. ……………………………7 分

又当 $x\to 0$ 时，$p(x)\to-\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$p(x)\to 0$，

当 $x<0$ 时，由于函数 $p(x)$ 是奇函数，

则当 $0<\ln a<\dfrac{2}{\sqrt{e}}$ 时，直线 $y=\ln a$ 与函数 $y=p(x)$ 图象有三个交点，

所以 $1<a<e^{\frac{2}{\sqrt{e}}}$. ……………………………8 分

（ii）证明：当 $0<\ln a<\dfrac{2}{\sqrt{e}}$ 时，$f(x)$ 存在三个零点 x_1,x_2,x_3，

由 $p(x)=\dfrac{1+\ln x^2}{x}=0$，得 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{e}}$，

所以 $-\dfrac{1}{\sqrt{e}}<x_1<0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}<x_2<\sqrt{e}<x_3$. ……………………………9 分

由于 $x_2\ln a=1+2\ln x_2$，$x_3\ln a=1+2\ln x_3$，

相减得 $(x_2-x_3)\ln a=2\ln x_2-2\ln x_3$， ……………………………10 分

由对数平均不等式得：

$\dfrac{2}{\ln a}=\dfrac{x_2-x_3}{\ln x_2-\ln x_3}<\dfrac{x_2+x_3}{2}$，所以 $x_2+x_3>\dfrac{4}{\ln a}$. ……………………………11 分

所以 $x_1+3x_2+x_3=x_1+2x_2+(x_2+x_3)$

8

$$>-\frac{1}{\sqrt{e}}+2(\frac{1}{\sqrt{e}})+\frac{4}{\ln a}=\frac{4}{\ln a}+\frac{1}{\sqrt{e}}>2\sqrt{e}+\frac{1}{\sqrt{e}}.$$ …………12分

另附：对数平均不等式的证明如下（占1分）

构造 $\phi(t)=\ln t-2\left(\frac{t-1}{t+1}\right)$，则 $\varphi'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}\ge 0$，

所以当 $t\in(0,1)$ 时，$\varphi(t)<\varphi(1)=0$，当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi(t)>\varphi(1)=0$，

所以当 $0<x_2<x_3$ 时，$0<\frac{x_2}{x_3}<1$，所以 $\varphi\left(\frac{x_2}{x_3}\right)=\ln\frac{x_2}{x_3}-2\left(\frac{\frac{x_2}{x_3}-1}{\frac{x_2}{x_3}+1}\right)<0$，

即 $\ln x_2-\ln x_3<2\left(\frac{x_2-x_3}{x_2+x_3}\right)$，又 $x_2-x_3<0,\ln x_2-\ln x_3<0$，

所以 $\frac{x_2-x_3}{\ln x_2-\ln x_3}<\frac{x_2+x_3}{2}$.