

2023-2024 学年度高三年级第一次调研测试

数学试题

总分：150 分 时间：120 分钟

注意事项：

- 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
- 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
- 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 已知集合 $A = \{x | x > 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 则 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = (\quad)$
A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{0, 1, 2, 3\}$ C. $\{4, 5\}$ D. $\{3, 4, 5\}$
- “ $a=1$ ”是“函数 $f(x) = \log_2 \frac{ax+1}{x-1}$ 是奇函数”的 (\quad)
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件
- 已知长方形 $ABCD$ 的边 $AB = 4$, $AD = 2$, E 为 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = (\quad)$
A. -14 B. 14 C. -18 D. 18
- 谢尔宾斯基 (Sierpinski) 三角形是一种分形, 它的构造方法如下: 取一个实心等边三角形 (如图 1), 沿三边中点的连线, 将它分成四个小三角形, 挖去中间小三角形 (如图 2), 对剩下的三个小三角形继续以上操作 (如图 3), 按照这样的方法得到的三角形就是谢尔宾斯基三角形. 如果图 1 三角形的边长为 2, 则图 4 被挖去的三角形面积之和是 (\quad)



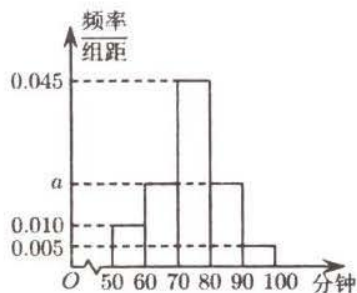
图 1 图 2 图 3 图 4

- $\frac{7\sqrt{3}}{16}$ B. $\frac{9\sqrt{3}}{16}$ C. $\frac{27\sqrt{3}}{64}$ D. $\frac{37\sqrt{3}}{64}$
- 某个弹簧振子做简谐运动, 已知在完成一次全振动的过程中, 时间 t (单位: s) 与位移 y (单位: cm) 之间满足函数关系: $y = \sin t + \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$, 则这个简谐运动的振幅是 (\quad)
A. 1cm B. 2cm C. $\sqrt{3}$ cm D. $2\sqrt{3}$ cm

6. 函数 $f(x) = \ln x - ax$ 与直线 $x + y + 1 = 0$ 相切, 则实数 a 的值为 ()
- A. 1 B. 2 C. e D. $2e$
7. 球 M 是圆锥 SO 的内切球, 若球 M 的半径为 1, 则圆锥 SO 体积的最小值为 ()
- A. $\frac{4}{3}\pi$ B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$ C. $\frac{8}{3}\pi$ D. 4π
8. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 且满足 $f(x) = 2 - f(6-x)$, $f'(x) = 2 - f'(4-x)$, $f'(3) = -1$, 若 $g(x) = f(3-x) + 5$, 则 $\sum_{k=1}^{18} g'(k) =$ ()
- A. -18 B. -20 C. 88 D. 90

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 实践育人是落实立德树人根本任务的重要环节, 是培养担当民族复兴大任时代新人的有效途径。某研究性学习小组为了解某校 2000 名学生参加 2023 年暑期社会实践的情况, 通过分层抽样的方法抽取一个容量为 N 的样本, 对学生某一天社会实践的时间 (单位: 分钟) 进行统计, 得到样本的频率分布直方图如图所示。已知样本中 $[60, 70)$ 的人数为 20 人, 则以下说法正确的是 ()



- A. $a = 0.020$ B. $N = 100$
- C. 估计该样本数据的平均数为 74
- D. 估计全校社会实践时间在 60 分钟以上的学生约为 180 人
10. 若 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 曲线 C 的方程为 $x^2 \cos \alpha + y^2 \sin \alpha = 1$, 则 ()
- A. 当 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时, 曲线 C 表示圆
- B. 当 $\alpha = 0$ 时, 曲线 C 表示两条直线
- C. 当 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 时, 曲线 C 表示焦点在 x 轴上的椭圆

D. 当 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 时, 曲线 C 表示焦点在 y 轴上的双曲线

11. 设 α, β 是两个不同的平面, m, n 是两条不同的直线, 下列命题正确的有 ()

A. 如果 $m \parallel n, m \parallel \alpha, n \parallel \beta$, 那么 $\alpha \parallel \beta$ B. 如果 $m \parallel n, m \perp \alpha, n \parallel \beta$, 那么 $\alpha \perp \beta$

C. 如果 $m \perp n, m \perp \alpha, n \perp \beta$, 那么 $\alpha \perp \beta$ D. 如果 $m \perp n, m \parallel \alpha, n \perp \beta$, 那么 $\alpha \parallel \beta$

12. 设函数 $f(x) = 2 + x - e^x$, 对于任意给定的实数 K , 定义函数 $f_K(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq K \\ xe^x - \ln 2, & f(x) > K \end{cases}$, 则下列

结论正确的有 ()

A. 函数 $y = f_1(x)$ 的零点有 3 个 B. $\exists t \in (0, 1)$, 使 $f_0(t) = 0$

C. 若 $\forall x \in \mathbf{R}, f_K(x) = f(x)$, 则 $K \geq 1$ D. 若 $f_K(x)$ 存在最大值, 则 $K \geq \ln 2$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. $\tan 555^\circ$ 的值为_____.

14. 在我国长江中下游地区, 每年的 6 月中下旬到 7 月中旬为梅雨季节, 这段时间阴雨天气较多. 这个地区的一个市级监测资料表明, 该市一天为阴雨天气的概率是 0.8, 连续两天为阴雨天气的概率是 0.72, 已知某天为阴雨天气, 则随后一天也为阴雨天气的概率是_____.

15. 定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) < 1$, 且 $f(e) = 3$, 则不等式 $f(x^2) - 2\ln x < 2$ 的解集为_____.

16. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 上顶点为 A , 直线 AF_1 与椭圆 C 交于另一点

B , 若 $\angle AF_2B = 120^\circ$, 则椭圆 C 的离心率为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

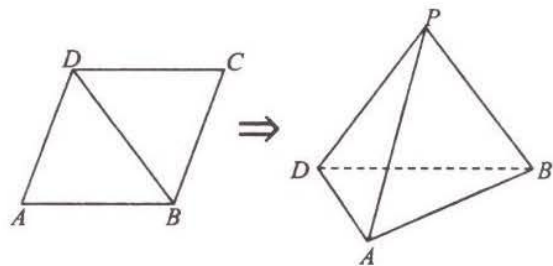
在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , D 为边 BC 上一点, $AD = 2$.

(1) 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = 2, \angle ADB = \frac{\pi}{4}$, 求 a ;

(2) 若 D 为 $\angle BAC$ 的角平分线与边 BC 的交点, $c = 2, C = \frac{\pi}{4}$, 求 a .

18. (本小题满分 12 分)

如图, 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, 将 $\triangle CBD$ 沿 BD 折起到 $\triangle PBD$ 的位置, 使 $PA = \sqrt{6}$.



- (1) 求证：平面 $PBD \perp$ 平面 ABD ；
 (2) 求直线 AB 与平面 PAD 所成角的正弦值。

19. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = ax^2 - 2 \ln x$.

- (1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性；
 (2) 求证：当 $a > 0$ 时， $f(x) \geq 2 - \frac{1}{a}$.

20. (本小题满分 12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_5 = 9, S_7 = 49$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ， $b_1 = 1, T_n = b_{n+1} - 1$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；
 (2) 设 $c_n = \frac{a_n^2}{b_n}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的最大项。

21. (本小题满分 12 分)

某数学兴趣小组设计了一个开盲盒游戏：在编号为 1 到 4 号的四个箱子中随机放入奖品，每个箱子中放入的奖品个数 ξ 满足 $P(\xi = n) = k \cdot n$ ($n = 1, 2, 3, 4, 5$)，每个箱子中所放奖品的个数相互独立。游戏规定：当箱子中奖品的个数超过 3 个时，可以从该箱中取走一个奖品，否则从该箱中不取奖品。每个参与游戏的同学依次从 1 到 4 号箱子中取奖品，4 个箱子都取完后该同学结束游戏。甲、乙两人依次参与该游戏。

- (1) 求甲能从 1 号箱子中取走一个奖品的概率；
 (2) 设甲游戏结束时取走的奖品个数为 X ，求 X 的概率分布与数学期望；
 (3) 设乙游戏结束时取走的奖品个数为 Y ，求 Y 的数学期望。

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - ax^2 + bx$.

- (1) 若 $a > 0, b = 0$ ，函数 $g(x) = |f(x)|$ 有两个极小值点，求实数 a 的取值范围；
 (2) 若 $a < 0, b = 1, f(x_1) + f(x_2) = 2$ ，求证： $\frac{4}{a} \leq x_1 + x_2 \leq 0$ 。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

