

成都石室中学高2023届高考适应性考试（二）

文科数学

（全卷满分150分，考试时间120分钟）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在本试卷和答题卡相应位置上。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答。答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁，考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷（选择题，共60分）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题列出的四个选项中，只有一项是最符合题目要求的。

1. 集合 $A = \{x \in \mathbf{N}^* \mid y = \ln(5-x)\}$ 的真子集的个数为（ ）

A. 3 B. 7 C. 15 D. 16

2. 有下列四个命题，其中是真命题的是（ ）

A. “全等三角形的面积相等”的否命题

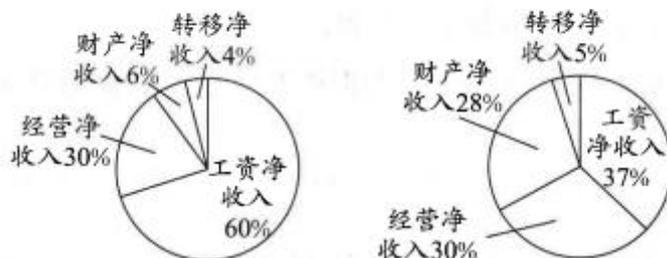
B. 在 $\triangle ABC$ 中，“ $A > \frac{\pi}{6}$ ”是“ $\sin A > \frac{1}{2}$ ”的充分不必要条件

C. 命题“ $\forall x > 1, x^3 > x^2$ ”的否定是“ $\exists x > 1, x^3 < x^2$ ”

D. 已知 $z = (1+i)(1-2i)$ ，其在复平面上对应的点落在第四象限

3. 某市 2022 年经过招商引资后，经济收入较前一年增加了一倍，实现翻番，为更好地了解该市的经济收入的变化情况，统计了该市招商引资前、后的年经济收入构成比例，得到如下扇形图。下列结论正确的是（ ）

招商引资前经济收入构成比例 招商引资后经济收入构成比例



A. 招商引资后，工资净收入较前一年减少

B. 招商引资后，转移净收入是前一年的 1.25 倍

C. 招商引资后，转移净收入与财产净收入的总和超过了该年经济收入的 $\frac{2}{5}$

D. 招商引资后，经营净收入较前一年增加了一倍

4. 幂函数 $f(x) = (m^2 - 3m - 3)x^m$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则下列说法正确的是 ()

- A. $m = 4$ B. $f(x)$ 是减函数 C. $f(x)$ 是奇函数 D. $f(x)$ 是偶函数

5. 函数 $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 图象的对称轴可以是 ()

- A. 直线 $x = \frac{5\pi}{12}$ B. 直线 $x = \frac{\pi}{3}$ C. 直线 $x = \frac{\pi}{6}$ D. 直线 $x = \frac{2\pi}{3}$

6. 已知 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 则下列命题正确的是 ()

- A. 若 $m \perp \alpha, m \perp n$, 则 $n \parallel \alpha$ B. 若 $m \parallel \alpha, m \parallel \beta, \alpha \cap \beta = n$, 则 $m \parallel n$
C. 若 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = n$, 则 $m \perp n$, 则 $m \perp \beta$ D. 若 $m \parallel n, n \subset \alpha$, 则 $m \parallel \alpha$

7. 2023 年 1 月底, 人工智能研究公司 OpenAI 发布的名为 “ChatGTP” 的人工智能聊天程序进入中国, 迅速以其极高的智能化水平引起国内关注. 深度学习是人工智能的一种具有代表性的实现方法, 它是以神经网络为出发点的, 在神经网络优化中, 指数衰减的学习率模型为 $L = L_0 D^{\frac{G}{G_0}}$, 其中 L 表示每一轮优化时使用的学习率, L_0 表示初始学习率, D 表示衰减系数, G 表示训练迭代轮数, G_0 表示衰减速度. 已知某个指数衰减的学习率模型的初始学习率为 0.8, 衰减速度为 12, 且当训练迭代轮数为 12 时, 学习率衰减为 0.5. 则学习率衰减到 0.2 以下 (不含 0.2) 所需的训练迭代轮数至少为 () (参考数据: $\lg 2 \approx 0.3010$)

- A. 36 B. 37 C. 38 D. 39

8. 目前, 全国所有省份已经开始了新高考改革. 改革后, 考生的高考总成绩由语文、数学、外语 3 门全国统一考试科目成绩和 3 门选择性科目成绩组成. 已知某班甲、乙同学都选了历史和地理科目, 且甲同学的另一科目会从化学、生物、政治这 3 科中选 1 科, 乙同学的另一科目会从化学、生物这 2 科中选 1 科, 则甲、乙所选科目不相同的概率是 ()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

9. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右顶点为 A , 左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 以 $F_1 F_2$ 为直径的圆

与双曲线 C 的渐近线在第一象限的交点为 M , 且 $|MF_1| = 3|MA|$, 则该双曲线的离心率为 ()

- A. $\frac{8}{7}$ B. $\frac{9}{7}$ C. $\frac{16}{7}$ D. $\frac{18}{7}$

10. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $\frac{S_n}{n} < \frac{S_{n+1}}{n+1}$, 若 $S_5 = S_{13}$, 则 ()

- A. S_n 的最小值是 S_9 B. S_n 的最小值是 S_{10} C. S_n 的最大值是 S_9 D. S_n 的最大值是 S_{10}

11. 已知平面上两定点 A, B , 则所有满足 $\frac{|PA|}{|PB|} = \lambda$ ($\lambda > 0$ 且 $\lambda \neq 1$) 的点 P 的轨迹是一个圆心在直线 AB 上,

半径为 $\left| \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \right| \cdot |AB|$ 的圆. 这个轨迹最先由古希腊数学家阿波罗尼斯发现, 故称作阿氏圆. 已知动点 P 在棱

长为 6 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的一个侧面 ABB_1A_1 上运动, 且满足 $|PA| = 2|PB|$, 则点 P 的轨迹长度为 ()

- A. $\frac{8\pi}{3}$ B. $\frac{4\pi}{3}$ C. $\sqrt{3}\pi$ D. $\frac{\sqrt{15}\pi}{2}$

12. 对 $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 不等式 $(e-1)(\ln a + x) \geq ae^x - 1$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{1}{2e}, \sqrt{e}\right]$ B. $[1, e]$ C. $[1, \sqrt{e}]$ D. $\left[\frac{1}{2e}, e\right]$

第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \leq 1, \\ x + y \leq 1, \\ 2y + x \geq 1, \end{cases}$, 则 $z = 2x - y$ 的最大值为_____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$, $n \in \mathbf{N}^*$, 若 $a_7 = 16$, $a_3 a_5 = 4$, 则 a_2 的值为_____.

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^3 - 3x^2 + e, & x \leq 1, \\ e^x, & x > 1, \end{cases}$ 若函数 $g(x) = f(x) - m$ 有且只有三个零点, 则实数 m 的取值范

围是_____.

16. 已知 A, B 为抛物线 $y = x^2$ 上两点, 以 A, B 为切点的抛物线的两条切线交于点 P , 过点 A, B 的直线斜率为 k_{AB} , 若点 P 的横坐标为 $\frac{1}{3}$, 则 $k_{AB} =$ _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答; 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题, 共 60 分.

17. (本小题满分 12 分) 某企业为了了解年广告费 x (单位: 万元) 对年销售额 y (单位: 万元) 的影响, 统计了近 7 年的年广告费 x_i 和年销售额 y_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) 的数据, 得到下面的表格:

年广告费 x	2	3	4	5	6	7	8
年销售额 y	25	41	50	58	64	78	89

由表中数据，可判定变量 x, y 的线性相关关系较强.

(I) 建立 y 关于 x 的线性回归方程;

(II) 已知该企业的年利润 z 与 x, y 的关系为 $z = 2\sqrt{y} - x$, 根据 (I) 的结果, 年广告费 x 约为何值时 (小数点后保留一位), 年利润的预报值最大?

附: 对于一组数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 其回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘估计分

$$\text{别为 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}; \quad \text{参考数据: } \sum_{i=1}^7 y_i = 405, \quad \sum_{i=1}^7 x_i y_i = 2305.$$

18. (本小题满分 12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\sqrt{3}b \sin \frac{B+C}{2} = a \sin B$, 边 BC 上有一动点 D .

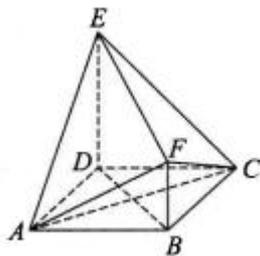
(I) 求角 A 的大小;

(II) 当 D 为边 BC 中点时, $AD = \sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

19. (本小题满分 12 分) 如图, 四边形 $ABCD$ 为菱形, $ED \perp$ 平面 $ABCD$, $FB \parallel ED$, $BD = ED = 2FB$.

(I) 求证: 平面 $BDEF \perp$ 平面 AFC ;

(II) 记三棱锥 $A-EFC$ 的体积为 V_1 , 三棱锥 $A-BFC$ 的体积为 V_2 , 求 $\frac{V_1}{V_2}$ 的值.



20. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = \ln x - a\left(1 - \frac{1}{x}\right)$.

(I) 若 $f(x) \geq 0$, 求实数 a 的值;

(II) 已知 $n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \geq 2$, 求证: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \ln n$.

21. (本小题满分 12 分) 已知点 $A(-2, 0), B(2, 0)$, 动点 $M(x, y)$ 满足直线 AM 与 BM 的斜率之积为 $-\frac{1}{4}$. 记动点 M 的轨迹为曲线 C .

(I) 求曲线 C 的方程, 并说明 C 是什么曲线;

(II) 设 P, Q 为曲线 C 上的两动点, 直线 BP 与直线 BQ 的斜率乘积为 $-\frac{1}{28}$.

①求证：直线 PQ 恒过一定点；

②设 $\triangle PQB$ 的面积为 S ，求 S 的最大值.

(二) 选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，那么按所做的第一题计分.

22. [选修 4—4：坐标系与参数方程] (本小题满分 10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 4 \sin t \cos t, \\ y = \cos^k t - \sin^k t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}), \text{ 直线 } l \text{ 的方程为 } x + y - 1 = 0.$$

(I) 当 $k=1$ 时，求曲线 C_1 的直角坐标方程；

(II) 当 $k=4$ 时，已知点 $P(1,0)$ ，直线 l 与曲线 C_1 交于 A, B 两点，线段 AB 的中点为 M ，求 $|PM|$ 的长.

23. [选修 4—5：不等式选讲] (本小题满分 10 分) 已知函数 $f(x) = |x^2 - 3x + 2| + x$.

(I) 求不等式 $f(x) \geq 2$ 的解集；

(II) 设函数 $f(x)$ 的最小值为 m ，正数 a, b, c 满足 $a+b+c=6m$ ，求证： $\sqrt{a} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+2} \leq 3\sqrt{3}$.