

高一数学试题

2023.07

本试卷共 4 页, 满分 150 分, 考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并收回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 $z = \frac{i}{2-i}$ 在复平面内对应的点位于

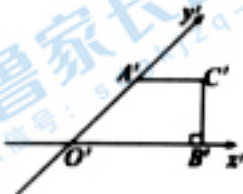
- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 已知角 α 的顶点为坐标原点, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 若 $P(-1, 2)$ 为角 α 终边上的一点, 则 $\cos \alpha =$

- A. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

3. 若水平放置的平面四边形 $AOBC$ 按斜二测画法得到如图所示的直观图, 其中 $A'C' \parallel O'B'$, $B'C' \perp O'B'$, $A'C' = 1$, $O'B' = 2$, 则原四边形 $AOBC$ 的边 BC 的长度为

- A. 2
B. $2\sqrt{2}$
C. 3
D. 4



4. $\cos 70^\circ \cos 170^\circ - \cos 20^\circ \sin 170^\circ =$

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. 已知一个圆锥的表面积为 4π , 其侧面展开图是一个圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的扇形, 则该圆锥的体积为

- A. $\sqrt{2}\pi$ B. $2\sqrt{2}\pi$ C. $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$

6. 如图所示,要测量电视塔 AB 的高度,可以选取与塔底 B 在同一水平面内的两个观测基点 C 与 D ,在点 C 测得塔顶 A 的仰角为 30° ,在点 D 测得塔顶 A 的仰角为 45° ,且 $CD=30\text{m}$, $\angle BDC=60^\circ$,则电视塔 AB 的高度为

- A. 25m
B. 20m
C. 15m
D. 10m



7. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB=AC=\frac{\sqrt{2}}{2}BC$, $\triangle PAC$ 是边长为 6 的等边三角形,若平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ,则该三棱锥的外接球的表面积为

- A. 72π B. 84π C. 108π D. 120π

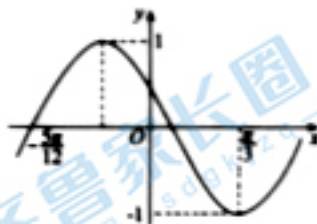
8. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 边 BC 上一点 P 满足 $\sin \angle PAB = 2 \sin \angle PAC$, 若 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 则 $\frac{x}{y} =$

- A. 3 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \pi$) 的部分图象如图所示, 则下列说法中正确的是

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π
B. $f(x)$ 的图象关于 $(\frac{7\pi}{12}, 0)$ 对称
C. $f(x)$ 在 $[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}]$ 上为减函数



- D. 把 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度可得一个偶函数的图象

10. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, -2)$, $\mathbf{b} = (\lambda, 1)$, 则下列说法中正确的是

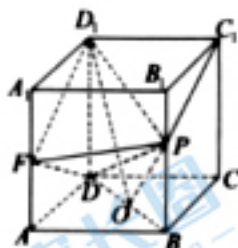
- A. 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 则 $\lambda = \frac{1}{2}$
B. 若 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 则 $\lambda = 2$
C. 若 $\lambda < 2$, 则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为钝角
D. 当 $\lambda = 1$ 时, 则 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 上的投影向量的坐标为 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

11. 某学校高一年级学生有 900 人, 其中男生 500 人, 女生 400 人. 为了获得该校高一全体学生的
身高信息, 现采用样本量比例分配的分层随机抽样方法抽取了容量为 180 的样本, 经计算得男
生样本的均值为 170, 方差为 19, 女生样本的均值为 161, 方差为 28, 则下列说法中正确的是

- A. 男生样本容量为 100
B. 抽取的样本的均值为 165.5
C. 抽取的样本的均值为 166
D. 抽取的样本的方差为 43

12. 如图所示, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, O, F 分别为 BD, AA_1 的中点, 点
 P 为棱 BB_1 上的动点 (包含端点), 则下列说法中正确的是

- A. $AC \perp D_1P$
B. 三棱锥 $F-DP D_1$ 的体积为定值
C. $FP+PC$ 的最小值为 $2+\sqrt{5}$
D. 当 P 为 BB_1 的中点时, 平面 D_1FP 截正方体所得截面的面积为 $2\sqrt{5}$



三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 $\tan \alpha = 2$, 则 $\frac{2 \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知 $1-i$ 是关于 x 的方程 $x^2+ax+b=0 (a, b \in \mathbb{R})$ 的一个根, 则 $ab = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA=AB=2$, 点 M 是 PC 的中点, 则直线 PA 和 BM 所成角的
余弦值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\frac{b}{a} = \frac{1+\cos B}{\cos A}$, 则 $\frac{3b-c}{2a}$ 的最大值为
 $\underline{\hspace{2cm}}$.

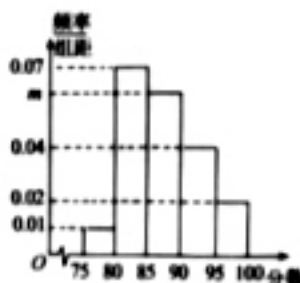
四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

某学校举行高一学生数学素养测试, 现从全年级所有学生中随机抽取 100 名学生的测试成
绩 (其成绩都落在 $[75, 100]$ 内), 得到如图所示的频率分布直方图, 其中分组区间为 $[75, 80)$,
 $[80, 85)$, $[85, 90)$, $[90, 95)$, $[95, 100]$.

(1) 求频率分布直方图中 m 的值;

(2) 估计该样本的 80% 分位数.



18. (12 分)

已知向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 且 $|\mathbf{a}|=1, |\mathbf{a}-2\mathbf{b}|=\sqrt{3}$.

(1) 求 $|\mathbf{b}|$;

(2) 若向量 $\mathbf{m}=2\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{n}=3\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, 求 $\mathbf{m}$ 与 $\mathbf{n}$ 的夹角.

19. (12 分)

已知函数 $f(x)=2\sin x \cos(x+\frac{\pi}{6})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 若 $f(\frac{\alpha}{2})=\frac{1}{10}, \alpha \in (\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$, 求 $\cos \alpha$ 的值.

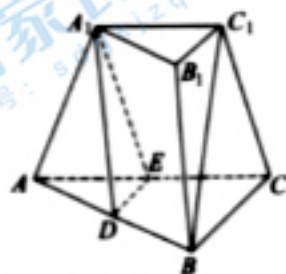
20. (12 分)

如图, 在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=2A_1B_1$, D, E 分别为 AB, AC 的中点.

(1) 求证: $BC_1 \parallel$ 平面 A_1DE ;

(2) 若三棱锥 A_1-ADE 的体积为 1,

求三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积.



21. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\sin^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 2 + \sin B \sin C$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $a=\sqrt{3}$, $\angle BAC$ 的角平分线交 BC 于点 D , 求线段 AD 长度的最大值.

22. (12 分)

如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 平面 $A_1BC \perp$ 平面 AA_1B_1B .

(1) 求证: $\triangle ABC$ 为直角三角形;

(2) 设点 D, E 分别为棱 AC, B_1C_1 的中点, 若二面角 A_1-BC-A 的大小为 45° , 且 $AB=BC=2$, 求直线 BC 与平面 BDE 所成角的正弦值.

