2022～2023学年高三押题信息卷

文科数学(一)参考答案

1. C　$A=\{x\mid |x|\leqslant 3\}=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\in\mathbf{Z}\mid y=\ln(x-1)\}=\{x\in\mathbf{Z}\mid x>1\}$，$\therefore A\cap B=\{2,3\}$. 故选 C.

2. B　法一：由已知得 $(2-\mathrm{i})z=3$，$\therefore z=\frac{3}{2-\mathrm{i}}=\frac{3(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\frac{3(2+\mathrm{i})}{5}$，$(1-\mathrm{i})z=\frac{3(2+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{5}=\frac{9}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}$，

$\therefore |(1-\mathrm{i})z|=\left|\frac{9}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}\right|=\sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^2+\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$.

法二：由已知得 $(2-\mathrm{i})z=3$，$\therefore |2-\mathrm{i}|\,|z|=3$，即 $\sqrt{5}\,|z|=3$，$\therefore |z|=\frac{3\sqrt{5}}{5}$. $|(1-\mathrm{i})z|=|1-\mathrm{i}|\,|z|=\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{5}}{5}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$. 故选 B.

3. B　对于 A，因为 $AA_1\perp$平面 ABC，$BC\subset$平面 ABC，所以 $AA_1\perp BC$；

对于 B，AB_1 与 BC_1 不一定垂直；

对于 C，因为 $AA_1\perp BC$，$AB\perp BC$，且 $AA_1\cap AB=A$，AA_1，$AB\subset$平面 ABB_1A_1，所以 $BC\perp$平面 ABB_1A_1，$AB_1\subset$平面 ABB_1A_1，所以 $AB_1\perp BC$；

对于 D，因为 $AA_1\perp$平面 ABC，$CC_1/\!/AA_1$，所以 $CC_1\perp$平面 ABC，$AB\subset$平面 ABC，所以 $CC_1\perp AB$，又 $AB\perp BC$，且 $BC\cap CC_1=C$，BC，$CC_1\subset$平面 BCC_1B_1，所以 $AB\perp$平面 BCC_1B_1，又 $B_1C\subset$平面 BCC_1B_1，所以 $AB\perp B_1C$. 故选 B.

4. C　基本事件共有 36 个，而满足点 (x,y) 到原点 O 的距离不大于 4 的基本事件有 $(1,1)$，$(1,2)$，$(1,3)$，$(2,1)$，$(2,2)$，$(2,3)$，$(3,1)$，$(3,2)$ 共 8 个，所求概率为 $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$. 故选 C.

5. A　由于 $\tan(\alpha+\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$ 是方程 $x^2+5x+6=0$ 的两个根，所以 $\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)=-5$，$\tan(\alpha+\beta)\cdot\tan(\alpha-\beta)=6$，所以 $\tan 2\alpha=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan(\alpha+\beta)\cdot\tan(\alpha-\beta)}=\frac{-5}{1-6}=1$. 故选 A.

6. B　执行第一次循环，$b=1+2=3$，$a=3-1=2$，$n=2$，$\left|\frac{b^2}{a^2}-2\right|=\left|\frac{3^2}{2^2}-2\right|=\frac{1}{4}>0.01$；

执行第二次循环，$b=3+4=7$，$a=7-2=5$，$n=3$，$\left|\frac{b^2}{a^2}-2\right|=\left|\frac{7^2}{5^2}-2\right|=\frac{1}{25}>0.01$；

执行第三次循环，$b=7+10=17$，$a=17-5=12$，$n=4$，$\left|\frac{b^2}{a^2}-2\right|=\left|\frac{17^2}{12^2}-2\right|=\frac{1}{144}<0.01$，此时输出 $n=4$. 故选 B.

7. C　设 $\overrightarrow{MP}=k\overrightarrow{MN}$，则 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{MN}$，显然 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$，得 $\overrightarrow{AP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+k\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{2k}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{4}{5}(1-k)\overrightarrow{AB}$，显然 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$. 因为 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AC}$，所以有 $\frac{2k}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{4}{5}(1-k)\overrightarrow{AB}=\lambda(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})$，即 $\frac{2k}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{4}{5}(1-k)\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AB}$，可知 $\begin{cases}\frac{2k}{3}=\lambda,\\ \frac{4}{5}(1-k)=\lambda,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{6}{11},\\ \lambda=\frac{4}{11}.\end{cases}$ 故选 C.

8. D　抛物线的焦点 $F(1,0)$，准线方程为 $x=-1$，设直线 $l:y=k(x-1)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得

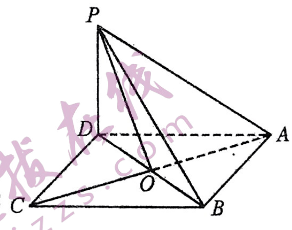
$k^2x^2-2(k^2+2)x+k^2=0$. 则 $x_1+x_2=\frac{2(k^2+2)}{k^2}$, $x_1x_2=1$, $|AF|\cdot|BF|=(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+(x_1+x_2)+1=1+\frac{2(k^2+2)}{k^2}+1=4+\frac{4}{k^2}=\frac{25}{4}$, 解得 $k=\pm\frac{4}{3}$. 故选 D.

9. D　因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 5 的奇函数,所以 $f(0)=f(5)=f(10)=0$, 又 $f(3)=0$, 所以 $f(3)=f(8)$, $f(-3)=f(2)=f(7)=0$, $f\left(-\frac{5}{2}\right)=-f\left(\frac{5}{2}\right)$, 则 $f\left(-\frac{5}{2}\right)=f\left(-\frac{5}{2}+5\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)$. 所以 $f\left(-\frac{5}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)=0$, $f\left(\frac{15}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}+5\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)=0$, 则 $f(x)$ 在 $[0,10]$ 内的零点个数最少是 9. 故选 D.

10. A　当 $N=2,\sigma=2\ 000$ 时, $x=R=\frac{\sigma}{N}=\frac{2\ 000}{2}=1\ 000$, 因为 $8.6^{-5.75}\approx4.23\times10^{-6}$, 且 $8.6^{-5.75x}=8.6^{-5.75\times1\ 000}=(8.6^{-5.75})^{1\ 000}\approx(4.23\times10^{-6})^{1\ 000}$ 近似于 0, 所以当 $x=1\ 000$ 时, y 近似于 $\frac{470}{1+0}=470$. 故选 A.

11. D　关于 x 的方程 $\sin 2x+2\cos 2x=-2$ 在 $[0,\pi)$ 内有两个不同的解 α,β, 即 $\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(2x+\theta)=-1\left(\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5},\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\right.$, 取 θ 为锐角$\left.\right)$ 在 $[0,\pi)$ 内有两个不同的解 α,β, 即方程 $\sin(2x+\theta)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 在 $[0,\pi)$ 内有两个不同的解 α,β. 不妨令 $\alpha<\beta$, 由 $x\in[0,\pi)$, 则 $2x+\theta\in[\theta,2\pi+\theta)$, 所以 $\sin(2\alpha+\theta)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin(2\beta+\theta)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\sin\theta=-\sin(2\alpha+\theta)=-\sin(2\beta+\theta)$. 则 $2\alpha+\theta=\pi+\theta$, $2\beta+\theta=2\pi-\theta$, 即 $2\alpha-2\beta=-\pi+2\theta$, 所以 $\alpha-\beta=-\frac{\pi}{2}+\theta$, $\cos(\alpha-\beta)=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 故选 D.

12. C　连接 BD,AC 交于 O, 连接 PO, 易得 O 为 BD 与 AC 的中点, ∵四边形 $ABCD$ 为菱形, ∴$AC\perp BD$, 即 $AO\perp BD$, $PO\perp BD$, ∴二面角 $A-BD-P$ 的平面角为 $\angle AOP$, ∴$\cos\angle AOP=-\frac{1}{3}$. 又 $AB=AD=2$, $\angle BAD=60^\circ$, ∴$AO=PO=\sqrt{3}$, $BD=2$; 在△AOP 中,由余弦定理得: $PA=\sqrt{AO^2+PO^2-2AO\cdot PO\cos\angle AOP}=2\sqrt{2}$; ∵$PD=AD=2$, $PB=AB=2$, ∴$PD^2+AD^2=PB^2+AB^2=PA^2$, ∴$PD\perp DA$, $PB\perp BA$, ∴三棱锥 $P-ABD$ 的外接球球心为 PA 中点,半径为 $\frac{1}{2}PA=\sqrt{2}$, ∴三棱锥 $P-ABD$ 外接球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi\times(\sqrt{2})^3=\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$. ∵$AO\perp BD$, $PO\perp BD$, $AO\cap PO=O$, $AO,PO\subset$ 平面 AOP, ∴$BD\perp$ 平面 AOP, ∵$\cos\angle AOP=-\frac{1}{3}$, $0^\circ<\angle AOP<180^\circ$, ∴$\sin\angle AOP=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, ∴$S_{\triangle AOP}=\frac{1}{2}AO\cdot PO\sin\angle AOP=\sqrt{2}$, ∴$V_{P-ABD}=\frac{1}{3}S_{\triangle AOP}\cdot BD=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, ∴三棱锥 $P-ABD$ 的外接球的体积与该三棱锥的体积之比为 $\frac{V}{V_{P-ABD}}=\frac{\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=4\pi$. 故选 C.

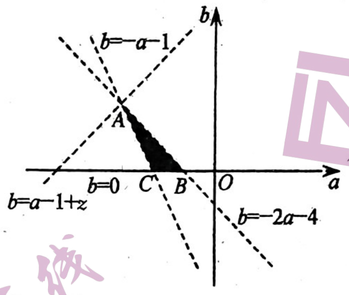


13. 24　由已知得椭圆与双曲线具有共同的焦点 $F_1(0,5)$, $F_2(0,-5)$, 由椭圆定义可知 $|PF_1|+|PF_2|=14$, 故 P 与双曲线两焦点的距离之和为 14, 又 $|F_1F_2|=10$, 因此 P 与双曲线两焦点连线构成三角形的周长为 $14+10=24$.

14. 1　解法 1: $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}=\frac{\sin C}{c}\Rightarrow\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}=\frac{\sin C}{\sin C}=1$, 而 $\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}=\frac{\cos A\sin B+\cos B\sin A}{\sin A\sin B}=\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}=\frac{\sin(\pi-C)}{\sin A\sin B}=\frac{\sin C}{\sin A\sin B}$, ∴$\frac{\sin C}{\sin A\sin B}=1$.

解法 2：由射影定理，$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}=\frac{b\cos A+a\cos B}{ab}=\frac{c}{ab}$，又由题意，$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}=\frac{\sin C}{c}$，$\therefore\frac{c}{ab}=\frac{\sin C}{c}$，故$\frac{c^2}{ab}=\sin C$，$\therefore\frac{\sin^2 C}{\sin A\sin B}=\sin C$，$\because 0<C<\pi$，$\therefore\sin C>0$，故$\frac{\sin C}{\sin A\sin B}=1$.

15.（2,6）　$\because f(x)=x^2+ax+b$ 在(0,1)和在(1,2)上各有 1 个零点，$\therefore\begin{cases}f(0)=b>0,\\ f(1)=1+a+b<0,\\ f(2)=4+2a+b>0,\end{cases}$ 画出它的可行域，如图所示：$\triangle ABC$ 的内部.



令 $z=f(-1)=1-a+b$，则 $b=a-1+z$，如图，当 $b=a-1+z$ 过 $B(-1,0)$ 时，$z=2$；当 $b=a-1+z$ 过 $A(-3,2)$ 时，$z=6$，故 $f(-1)$ 的取值范围是(2,6).

16.$[e,+\infty)$　因为 $at+(b-2ea)\ln b\geqslant(b-2ea)\ln a$，所以 $at+(b-2ea)(\ln b-\ln a)\geqslant0$，因为 $a>0$，所以$\left(\frac{b}{a}-2e\right)\ln\frac{b}{a}\geqslant-t$，令 $x=\frac{b}{a}$，$x>0$，则 $f(x)=(x-2e)\ln x$，$x>0$，$f'(x)=\ln x+(x-2e)\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1-\frac{2e}{x}$，易知 $f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，又 $f'(e)=\ln e+1-\frac{2e}{e}=0$，所以在$(0,e)$上，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；在$(e,+\infty)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(e)=(e-2e)\ln e=-e$，所以$-t\leqslant-e$，即 $t\geqslant e$，故 t 的取值范围为$[e,+\infty)$.

17.解：(1)由题知男性顾客共有 $350\times\frac{3}{5}=210$ 人，女性顾客共有 $350\times\frac{2}{5}=140$ 人，…………………………… 1分

按分层抽样抽取 105 人，则应该抽取男性顾客 $105\times\frac{210}{350}=63$ 人，女性顾客 $105\times\frac{140}{350}=42$ 人；………………… 2分

所以 $x=63-(8+9+19+12+8+4)=3$，$y=42-(2+5+12+11+7+2)=3$. ……………………………………… 4分

(2)由频率分布表可知，在抽取的 105 人中，男性顾客中频繁更换手机的有 20 人，女性顾客中频繁更换手机的有 10 人，据此可得 2×2 列联表：

	频繁更换手机	未频繁更换手机	合计
男性顾客	20	43	63
女性顾客	10	32	42
合计	30	75	105

…………………… 8分

所以 $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}\approx0.778$.

因为 $0.778<6.635$，所以没有 99%以上的把握认为"频繁更换手机与性别有关". ……………………………… 12分

18.解：(1)因为 $S_n=2a_n-1$，当 $n=1$ 时，$S_1=2a_1-1$，解得 $a_1=1$；…………………………………………… 1分

当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$，所以 $S_n-S_{n-1}=2a_n-1-(2a_{n-1}-1)$，即 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$，

所以 $a_n=2a_{n-1}$，即$\{a_n\}$是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，………………………………………… 3分

所以 $a_n=2^{n-1}$. ………………………………………………………………………………………… 4分

$S_n=2a_n-1=2^n-1$,则 $b_n=30-\log_2(S_n+1)=30-n$. ………………………………………… 5分

(2)因为 $a_n=2^{n-1}$,即数列$\{a_n\}$为递增数列,

$b_n=30-n$,即数列$\{b_n\}$单调递减. ………………………………………… 6分

$b_1=29,b_2=28,b_3=27,b_4=26,b_5=25,b_6=24,\cdots$,

$a_1=1,a_2=2,a_3=4,a_4=8,a_5=16,a_6=32,\cdots$,

所以当 $n\geqslant6$ 时,$a_n>b_n$,当 $n\leqslant5$ 时,$a_n<b_n$,

所以 $c_n=a_n*b_n=\begin{cases}b_n,n\leqslant5,\\a_n,n\geqslant6.\end{cases}$ ………………………………………… 9分

所以 $T_{20}=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+a_6+\cdots+a_{20}$

$=\frac{5(b_1+b_5)}{2}+\frac{32(1-2^{15})}{1-2}$

$=135+2^{20}-32=1\ 048\ 679$. ………………………………………… 12分

19.(1)解:设椭圆 C 的半焦距为 c.当圆 $x^2+y^2=4$ 在椭圆 C 的内部时,$b=2,c=1,a^2=b^2+c^2=5$,

椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$. ………………………………………… 2分

当圆 $x^2+y^2=4$ 在椭圆 C 的外部时,$a=2,c=1,b^2=a^2-c^2=3$,

椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………… 4分

(2)证明:设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

因为椭圆 C 的短轴长小于 4,

所以 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………… 5分

则由已知可得,切线 AT 的方程为$\frac{x_1x}{4}+\frac{y_1y}{3}=1$,$BT$ 的方程为$\frac{x_2x}{4}+\frac{y_2y}{3}=1$, ………………………… 7分

将 $T(8,t)$代入 AT,BT 的方程整理可得,

$6x_1+ty_1-3=0,6x_2+ty_2-3=0$.

显然 A,B 的坐标都满足方程 $6x+ty-3=0$, ………………………………………… 10分

故直线 AB 的方程为 $6x+ty-3=0$,

令 $y=0$,可得 $x=\frac{1}{2}$,即直线 AB 过定点$\left(\frac{1}{2},0\right)$. ………………………………………… 12分

20.解:(1)过 P 作直线 l 与 BC 平行,延长 DE 与 l 交于点 G,连接 OG,OG 与 PB 的交点即为点 F. ………………… 2分

因为底面 $ABCD$ 是正方形,O 是 BC 的中点,所以 $AD\parallel BC$,且 $AD=2OB$.

又 $l\parallel BC$,所以 $l\parallel AD$,因为 E 是 PA 的中点,可得 $PG=AD$,则 $PG=2OB$,所以 $PF=2BF$.

故 F 在棱 PB 的靠近 B 的三等分点处. ………………………………………… 5分

(2)连接 OP,OE.

多面体 $POCDEF$ 的体积 $V=V_{P\text{-}OCD}+V_{E\text{-}POD}+V_{E\text{-}POF}$.

因为 $PB=PC=2$,O 为 BC 中点,所以 $PO\perp BC$,$PO=\sqrt{PC^2-OC^2}=\sqrt{3}$. ………………………… 6分

又平面 $PBC\perp$平面 $ABCD$,平面 $PBC\cap$平面 $ABCD=BC$,$PO\subset$平面 PBC,所以 $PO\perp$平面 $ABCD$,

而 $OD\subset$平面 $ABCD$,所以 $PO\perp OD$,

自主选拔在线 www.zizzs.com

所以 $V_{P-OCD}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle OCD}\times PO=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times2\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………………………………………… 7分

因为 E 为 PA 中点，所以 $V_{E-POD}=\frac{1}{2}V_{A-POD}=\frac{1}{2}V_{P-OAD}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

因为 F 为 PB 的靠近 B 的三等分点，所以 $V_{E-POF}=\frac{2}{3}V_{E-POB}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}V_{A-POB}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\times2=\frac{\sqrt{3}}{9}$,

所以 $V=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{9}=\frac{7\sqrt{3}}{9}$.

故多面体 $POCDEF$ 的体积为 $\frac{7\sqrt{3}}{9}$. ………………………………………… 12分

21. (1)证明：$f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$,

$f'(x)=\frac{a}{x}-b$. ………………………………………… 1分

设切点为 $(x_0,a\ln x_0-bx_0)$,

则切线方程为 $y-(a\ln x_0-bx_0)=\left(\frac{a}{x_0}-b\right)(x-x_0)$. ………………………………………… 2分

因为切线过原点，所以 $0-(a\ln x_0-bx_0)=\left(\frac{a}{x_0}-b\right)(0-x_0)$，整理得 $a(\ln x_0-1)=0$.

因为 $a\neq0$，所以 $x_0=e$. 即切点仅有一个，曲线 $y=f(x)$ 仅有一条过原点的切线. ………………………………………… 4分

(2)解：因为关于 x 的方程 $f(x)=m-x^2$ 有唯一解，即方程 $\frac{x^2}{b}+2\ln x-x=\frac{m}{b}$ 有唯一解，

令 $g(x)=\frac{x^2}{b}+2\ln x-x$，所以 $g'(x)=\frac{2x}{b}+\frac{2}{x}-1=\frac{2x^2-bx+2b}{bx}$. ………………………………………… 5分

当 $b^2-16b\leqslant0$，即 $0<b\leqslant16$ 时，$g'(x)\geqslant0$，函数 $y=g(x)$ 单调递增，易知 $g(x)$ 的图象与直线 $y=\frac{m}{b}$ 有且只有一个交点，满足题意；………………………………………… 6分

当 $b^2-16b>0$，即 $b>16$ 时，$2x^2-bx+2b=0$ 有两个根，且两根之和为 $\frac{b}{2}>8$，两根之积为 $b>16$. ………… 7分

若两根一个大于 4，一个小于 4，此时函数 $g(x)$ 先增后减再增，存在一个极大值和一个极小值，要使 $\frac{x^2}{b}+2\ln x-x=\frac{m}{b}$ 有唯一实数根，

则 $\frac{m}{b}$ 大于 $g(x)$ 的极大值或小于 $g(x)$ 的极小值. ………………………………………… 8分

记 x_3 为极大值点，则 $x_3<4$，则 $g(x_3)=\frac{x_3^2}{b}+2\ln x_3-x_3<\frac{m}{b}$ 恒成立，

又 $2x_3^2-bx_3+2b=0$，即 $2x_3^2=b(x_3-2)$，$b=\frac{2x_3^2}{x_3-2}$.

则极大值 $g(x_3)=\frac{x_3^2}{b}+2\ln x_3-x_3=\frac{1}{2}(x_3-2)-x_3+2\ln x_3=2\ln x_3-\frac{1}{2}x_3-1$,

令 $h(x)=2\ln x-\frac{x}{2}-1$，则 $h'(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{2}=\frac{4-x}{2x}$.

当 $x\in(0,4)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；当 $x\in(4,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减.

$g(x_3)=h(x_3)<h(4)=4\ln 2-3$，则 $\frac{m}{b}\geqslant4\ln 2-3$，$m\geqslant(4\ln 2-3)b>16(4\ln 2-3)=64\ln 2-48$； ………… 10分

同理，记 x_4 为极小值点，则 $x_4>4$，则 $g(x_4)=h(x_4)=2\ln x_4-\frac{1}{2}x_4-1$,

所以 $V_{P-OCD}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle OCD}\times PO=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times2\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. …………………………………………………… 7分

因为 E 为 PA 中点,所以 $V_{E-POD}=\frac{1}{2}V_{A-POD}=\frac{1}{2}V_{P-OAD}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

因为 F 为 PB 的靠近 B 的三等分点,所以 $V_{E-POF}=\frac{2}{3}V_{E-POB}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}V_{A-POB}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\times2=\frac{\sqrt{3}}{9}$,

所以 $V=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{9}=\frac{7\sqrt{3}}{9}$.

故多面体 $POCDEF$ 的体积为$\frac{7\sqrt{3}}{9}$. …………………………………………………… 12分

21. (1)证明:$f(x)$定义域为$(0,+\infty)$,

$f'(x)=\frac{a}{x}-b$. …………………………………………………… 1分

设切点为$(x_0,a\ln x_0-bx_0)$,

则切线方程为 $y-(a\ln x_0-bx_0)=\left(\frac{a}{x_0}-b\right)(x-x_0)$. …………………………………………………… 2分

因为切线过原点,所以 $0-(a\ln x_0-bx_0)=\left(\frac{a}{x_0}-b\right)(0-x_0)$,整理得 $a(\ln x_0-1)=0$.

因为 $a\neq0$,所以 $x_0=e$. 即切点仅有一个,曲线 $y=f(x)$仅有一条过原点的切线. …………………………………………………… 4分

(2)解:因为关于 x 的方程 $f(x)=m-x^2$ 有唯一解,即方程$\frac{x^2}{b}+2\ln x-x=\frac{m}{b}$有唯一解,

令 $g(x)=\frac{x^2}{b}+2\ln x-x$,所以 $g'(x)=\frac{2x}{b}+\frac{2}{x}-1=\frac{2x^2-bx+2b}{bx}$. …………………………………………………… 5分

当 $b^2-16b\leqslant0$,即 $0<b\leqslant16$ 时,$g'(x)\geqslant0$,函数 $y=g(x)$单调递增,易知 $g(x)$的图象与直线 $y=\frac{m}{b}$有且只有一个交点,满足题意; …………………………………………………… 6分

当 $b^2-16b>0$,即 $b>16$ 时,$2x^2-bx+2b=0$ 有两个根,且两根之和为$\frac{b}{2}>8$,两根之积为 $b>16$. …………………………………………………… 7分

若两根一个大于 4,一个小于 4,此时函数 $g(x)$先增后减再增,存在一个极大值和一个极小值,要使$\frac{x^2}{b}+2\ln x-x=\frac{m}{b}$有唯一实数根,

则$\frac{m}{b}$大于$g(x)$的极大值或小于$g(x)$的极小值. …………………………………………………… 8分

记 x_3 为极大值点,则 $x_3<4$,则 $g(x_3)=\frac{x_3^2}{b}+2\ln x_3-x_3<\frac{m}{b}$恒成立,

又 $2x_3^2-bx_3+2b=0$,即 $2x_3^2=b(x_3-2)$,$b=\frac{2x_3^2}{x_3-2}$.

则极大值 $g(x_3)=\frac{x_3^2}{b}+2\ln x_3-x_3=\frac{1}{2}(x_3-2)-x_3+2\ln x_3=2\ln x_3-\frac{1}{2}x_3-1$,

令 $h(x)=2\ln x-\frac{x}{2}-1$,则 $h'(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{2}=\frac{4-x}{2x}$.

当 $x\in(0,4)$时,$h'(x)>0$,$h(x)$单调递增;当 $x\in(4,+\infty)$时,$h'(x)<0$,$h(x)$单调递减.

$g(x_3)=h(x_3)<h(4)=4\ln2-3$,则$\frac{m}{b}\geqslant4\ln2-3$,$m\geqslant(4\ln2-3)b>16(4\ln2-3)=64\ln2-48$; …………… 10分

同理,记 x_4 为极小值点,则 $x_4>4$,则 $g(x_4)=h(x_4)=2\ln x_4-\frac{1}{2}x_4-1$,