天一大联考
2022—2023 学年高三考前定位考试
文科数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案　C

命题意图　本题考查集合的表示与运算.

解析　$A\cap B=\{-2,-1,2\}$.

2. 答案　A

命题意图　本题考查复数的基本运算及几何意义.

解析　由题得 $z=\frac{3+2i}{1-i}=\frac{(3+2i)(1+i)}{2}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$,$z$ 对应的点位于第一象限.

3. 答案　B

命题意图　本题考查分段函数求值.

解析　$f(1)=4^{1-2}=\frac{1}{4}$,$\therefore f(f(1))=f\left(\frac{1}{4}\right)=\log_2\frac{1}{4}=-2$.

4. 答案　D

命题意图　本题考查分层随机抽样.

解析　由题可知$\frac{n}{1\ 200}=\frac{21}{700}$,解得 $n=36$.

5. 答案　C

命题意图　本题考查三角函数的图象与性质.

解析　将 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$,纵坐标不变得到 $y=\sin 2x$ 的图象,再将 $y=\sin 2x$ 图象上所有点向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象. 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$时,$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$,$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$.

6. 答案　B

命题意图　本题考查平面向量的坐标运算.

解析　$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(2+3x,7)$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2-x,-1)$,因为$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})/\!/(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,所以$(2+3x)\times(-1)=7\times(2-x)$,解得 $x=4$.

7. 答案　D

命题意图　本题考查样本的数字特征.

解析　若连续 5 周的量化打分数据为 88,87,81,80,79,满足 A,B 的条件,但第 5 周的打分低于 80 分,A,B 错误;若连续 5 周的量化打分数据为 83,83,81,80,79,满足 C 的条件,但第 5 周的打分低于 80 分,C 错误;根据方差公式 $s^2=\frac{1}{5}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+(x_4-\bar{x})^2+(x_5-\bar{x})^2]$,因为方差为 1,$\bar{x}=83$,所以若存在一

周的量化打分低于 80 分，则方差一定大于 1，故能断定该班为优秀班级，D 正确.

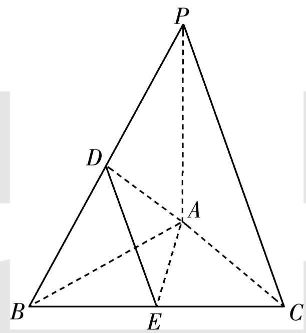
8. **答案**　D

命题意图　本题考查异面直线所成的角的计算.

解析　如图所示，取 BC 的中点 E，连接 AE，DE，则 $DE/\!/PC$，$\angle ADE$ 或其补角即为异面直线 AD 与 PC 所成的角.

容易计算得 $AE=2\sqrt{2}$，$DE=\sqrt{13}$，$DA=\sqrt{13}$，在 $\triangle ADE$ 中，根据余弦定理可得 $\cos\angle ADE=\dfrac{AD^2+DE^2-AE^2}{2AD\times DE}=$

$\dfrac{13+13-8}{2\times 13}=\dfrac{9}{13}$.



9. **答案**　A

命题意图　本题考查分段函数的单调性.

解析　若 $a=0$，$f(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ -(x-2)^2, x\geqslant 0,\end{cases}$ $\therefore f(x)$ 的最大值为 0. 若 $a<0$，当 $x<a$ 时，$f(x)>0$，不符合条件. 若 $a>0$，当 $x<a$ 时，$f(x)=-a\mathrm{e}^x$ 单调递减，$f(x)<0$，当 $x\geqslant a$ 时，根据二次函数的性质，要使 $f(x)$ 的最大值为 0，需 $a\leqslant 2$. 综上可得 $0\leqslant a\leqslant 2$.

10. **答案**　D

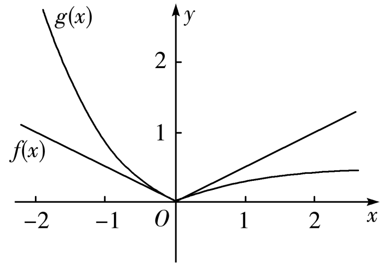
命题意图　本题考查正弦定理的应用及三角恒等变换.

解析　在 $\triangle ABC$ 中，由 $\sin A=\sin B\cos C$ 可得 $\sin(B+C)=\sin B\cos C$，所以 $\cos B\sin C=0$，因为 $B,C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C\neq 0$，且 $\cos B=0$，所以 $B=\dfrac{\pi}{2}$，又 $A=\dfrac{\pi}{6}$，可得 $C=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\dfrac{c+a}{\sin C+\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$.

11. **答案**　C

命题意图　本题考查函数图象与方程的根.

解析　$g(x)=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x}\right|=\dfrac{1}{2}|\mathrm{e}^{-x}-1|$. 易知方程 $f(x)=g(x)$ 总有一个实根为 0，当 $k\leqslant 0$ 时，该方程没有其他实根. 当 $k=\dfrac{1}{2}$ 时，如图所示，作出两函数的大致图象，可知坐标原点为两个图象的公共点. 又根据 $g(x)$ 在原点左右两侧的切线斜率可知两图象在原点处相切，此时方程仅有一个实根 0. 当 $0<k<\dfrac{1}{2}$ 时，方程另有一正根；当 $k>\dfrac{1}{2}$ 时，方程另有一负根. 故满足条件的 k 的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.



12. **答案** B

命题意图 本题考查双曲线的方程与性质.

解析 设双曲线 C 的右焦点为 F'，连接 PF'，MF'，NF'. 因为 $\angle OFM=\angle OMF$，所以 $|OM|=|OF|=|OF'|$，故四边形 $MFNF'$ 为矩形. 不妨设 $|NF|=x$，则 $|PF|=2x$，则 $|NF'|=2a+x$，$|PF'|=2a+2x$，故 $|PN|^2+|NF'|^2=|PF'|^2$，即 $9x^2+(2a+x)^2=(2a+2x)^2$，解得 $x=\frac{2}{3}a$. 而 $|NF|^2+|NF'|^2=|FF'|^2$，即 $\frac{4}{9}a^2+\frac{64}{9}a^2=\frac{68}{9}a^2=4a^2+4b^2$，整理得 $\frac{b}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，故所求渐近线方程为 $y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}x$.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

命题意图 本题考查椭圆的基本性质.

解析 设圆柱的底面半径为 r，则椭圆短轴长为 $2b=2r$，长轴长为 $2a=4r$，则 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$，离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

14. **答案** $\frac{3}{4}$

命题意图 本题考查三角恒等变换的应用.

解析 由 $\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos\alpha=\frac{5}{2}$，得 $\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}$.

15. **答案** 1

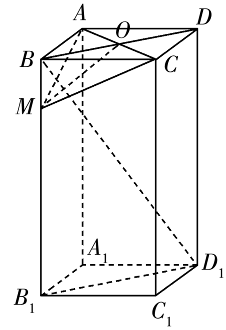
命题意图 本题考查奇函数的性质.

解析 设 $g(x)=2^x-2^{-x}$，$h(x)=\ln(\mathrm{e}^{2x}+1)-ax$. 因为 $g(-x)+g(x)=2^{-x}-2^x+2^x-2^{-x}=0$，所以 $g(x)$ 为奇函数，则 $h(x)$ 为偶函数，则 $h(-x)=\ln(\mathrm{e}^{-2x}+1)+ax=\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^{2x}}\right)+ax=\ln(\mathrm{e}^{2x}+1)-(2-a)x=h(x)=\ln(\mathrm{e}^{2x}+1)-ax$，所以 $2-a=a$，$a=1$.

16. **答案** $\frac{19}{9}\pi$

命题意图 本题考查简单几何体的结构特征.

解析 如图所示，设 AC 与 BD 交于点 O，连接 OM. 因为 $BD_1\perp$ 平面 ACM，所以 $BD_1\perp OM$，在平面 BDD_1B_1 内利用三角形相似可以求得 $BM=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{3}$，三棱锥 $B-ACM$ 的外接球直径为 $\sqrt{\frac{1}{3^2}+1^2+1^2}=\sqrt{\frac{19}{9}}$，故其外接球的表面积为 $\frac{19}{9}\pi$.



三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查等差数列与等比数列的基本性质.

解析 （Ⅰ）设$\{a_n\}$的公比为 q. ……（1 分）

$\because a_7=8a_4$，$\therefore a_4q^3=8a_4$，$\therefore q=2$. ……（2 分）

$\because \frac{1}{2}a_2, a_3-4, a_4-12$ 成等差数列，

$\therefore 2(a_3-4)=\frac{1}{2}a_2+a_4-12$，$\therefore 2(4a_1-4)=a_1+8a_1-12$，$\therefore a_1=4$. ……（4 分）

$\therefore a_n=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$. ……（6 分）

（Ⅱ）$b_n=\log_{\sqrt{2}}a_n=2(n+1)$， ……（7 分）

则$\{b_n\}$是以 4 为首项，2 为公差的等差数列，

$\therefore T_n=4n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2+3n$， ……（9 分）

令 $T_n\geqslant 70$，得 $n^2+3n\geqslant 70$，解得 $n\geqslant 7$ 或 $n\leqslant -10$，

又 $n\in\mathbf{N}^*$，$\therefore n$ 的最小值为 7. ……（12 分）

18. **命题意图** 本题考查频率分布直方图及用样本估计总体.

解析 （Ⅰ）由频率分布直方图知数据落在$[20,25)$内的频率为 $1-(0.024+0.036+0.060+0.024+0.012)\times 5=0.22$， ……（2 分）

所以 $x=\frac{0.22}{5}=0.044$. ……（4 分）

（Ⅱ）估计这 100 户居民月用水量的中位数为 a.

因为$(0.024+0.036)\times 5=0.3<0.5$，$(0.024+0.036+0.060)\times 5=0.6>0.5$，

所以 $15<a<20$. ……（6 分）

由 $0.3+(a-15)\times 0.06=0.5$，可得 $a\approx 18.3$. ……（8 分）

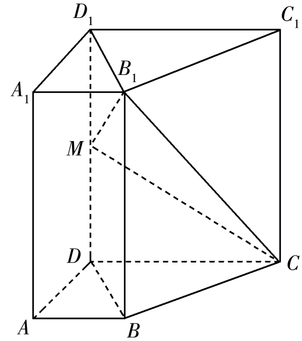
（Ⅲ）估计该市每户居民月用水量的平均数为

$7.5\times 0.024\times 5+12.5\times 0.036\times 5+17.5\times 0.060\times 5+22.5\times 0.044\times 5+27.5\times 0.024\times 5+32.5\times 0.012\times 5=18.6$， ……（10 分）

故估计该市平均每户居民月缴纳水费的金额为 $12\times 3+(18.6-12)\times 5=69$（元）. ……（12 分）

19. **命题意图** 本题考查空间中垂直关系的证明，空间距离的计算.

解析 （Ⅰ）如图，连接 BD.



$\because AB=AD=1, CD=2, \therefore BD=BC=\sqrt{2}$, ……………………………………………………（1 分）

$\therefore BD^2+BC^2=CD^2, \therefore BC\perp BD$. ……………………………………………………（2 分）

$\because BB_1\perp$平面 $ABCD, \therefore BB_1\perp BC$, ……………………………………………………（3 分）

又 $BB_1\cap BD=B, \therefore BC\perp$平面 B_1BDD_1, ……………………………………………………（5 分）

$\because B_1M\subset$平面 $B_1BDD_1, \therefore BC\perp B_1M$. ……………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）设 $AA_1=2a(a>0)$,

则由已知可得 $B_1M^2=B_1D_1^2+D_1M^2=2+a^2, CM^2=CD^2+MD^2=4+a^2, B_1C^2=BB_1^2+BC^2=2+4a^2$, …（8 分）

$\because B_1M\perp CM, \therefore B_1M^2+CM^2=B_1C^2$,即 $2+a^2+4+a^2=2+4a^2$, ……………………………（9 分）

解得 $a=\sqrt{2}. \therefore AA_1=2\sqrt{2}$, ……………………………………………………（10 分）

$\therefore$ 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积 $V=S_{梯形ABCD}\cdot AA_1=\frac{1}{2}\times(1+2)\times1\times2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$. ……………（12 分）

20. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数的性质.

解析 （Ⅰ）由题意知 $f'(x)=e^x+(x-1)e^x+2ax=x(e^x+2a)$, ……………………………………（1 分）

因为 $a<-\frac{1}{2}$,所以 $-2a>1, \ln(-2a)>0$, ……………………………………………………（2 分）

令 $f'(x)>0$,得 $x<0$ 或 $x>\ln(-2a)$,令 $f'(x)<0$,得 $0<x<\ln(-2a)$, ……………………………（4 分）

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(\ln(-2a),+\infty)$,单调递减区间为 $(0,\ln(-2a))$. …………（5 分）

（Ⅱ）由 $(x-1)e^x+ax^2\geqslant\frac{2}{3}x^3+ae^x+4a$,得 $\frac{2}{3}x^3-ax^2+4a-(x-a-1)e^x\leqslant0$.

设 $g(x)=\frac{2}{3}x^3-ax^2+4a-(x-a-1)e^x, x\geqslant0$,

则 $g'(x)=2x^2-2ax-(x-a)e^x=(x-a)(2x-e^x)$. ……………………………………………………（6 分）

由 $g(0)=5a+1\leqslant0$,可得 $a\leqslant-\frac{1}{5}$. ……………………………………………………（7 分）

设 $h(x)=2x-e^x, x\geqslant0$,则 $h'(x)=2-e^x$,

当 $0<x<\ln 2$ 时,$h'(x)>0$,当 $x>\ln 2$ 时,$h'(x)<0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0,\ln 2)$ 上单调递增,在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递减,

所以 $h(x)\leqslant h(\ln 2)=2\ln 2-2=\ln 4-2<0$. ……………………………………………………（9 分）

因为 $a\leqslant-\frac{1}{5}, x>0$,所以 $x-a>0$,

所以 $g'(x)<0$,所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减,

则 $g(x)_{\max}=g(0)=5a+1\leqslant 0$，符合条件.

故实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{5}\right]$. ……………………………………………………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查抛物线的性质，抛物线与直线的位置关系.

解析 （Ⅰ）由题意，设 C 的方程为 $x^2=2py(p>0)$，

因为圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 经过抛物线 C 的焦点 $\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$，……………………………………（2 分）

所以 $\left(\dfrac{p}{2}-1\right)^2=1$，解得 $p=4$，……………………………………………………（3 分）

所以 C 的方程为 $x^2=8y$. ……………………………………………………………（4 分）

（Ⅱ）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1\neq x_2$，联立方程组 $\begin{cases}x^2=8y,\\ mx+y-4=0,\end{cases}$ 整理得 $x^2+8mx-32=0$，

所以 $\Delta=64m^2+128>0$，且 $x_1+x_2=-8m$，$x_1x_2=-32$，

所以 $|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=8\sqrt{(1+m^2)(m^2+2)}$. ……………………………（5 分）

由 $x^2=8y$，可得 $y=\dfrac{x^2}{8}$，则 $y'=\dfrac{x}{4}$，所以抛物线 C 的过点 A 的切线方程是 $y-y_1=\dfrac{x_1}{4}(x-x_1)$，

将 $y_1=\dfrac{x_1^2}{8}$ 代入上式整理得 $y=\dfrac{x_1}{4}x-\dfrac{x_1^2}{8}$，

同理可得抛物线 C 的过点 B 的切线方程为 $y=\dfrac{x_2}{4}x-\dfrac{x_2^2}{8}$. ……………………………………（7 分）

由 $\begin{cases}y=\dfrac{x_1}{4}x-\dfrac{x_1^2}{8},\\ y=\dfrac{x_2}{4}x-\dfrac{x_2^2}{8},\end{cases}$ 解得 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$y=\dfrac{x_1x_2}{8}$，所以 $x=-4m$，$y=-4$，……………………（8 分）

所以 $P(-4m,-4)$ 到直线 $mx+y-4=0$ 的距离 $d=\dfrac{|m\times(-4m)-4-4|}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{4(m^2+2)}{\sqrt{m^2+1}}$，………………（9 分）

所以 $\triangle ABP$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|AB|d=\dfrac{1}{2}\times 8\sqrt{(1+m^2)(m^2+2)}\times\dfrac{4(m^2+2)}{\sqrt{m^2+1}}=16(m^2+2)^{\frac{3}{2}}$，…………（11 分）

当 $m=0$ 时，$S_{\min}=32\sqrt{2}$，

所以 $\triangle ABP$ 面积的最小值为 $32\sqrt{2}$. ……………………………………………………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查参数方程与普通方程的互化以及直线与椭圆的位置关系.

解析 （Ⅰ）将 C 的参数方程化为普通方程：$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$，

即 C 是一个椭圆，C 上纵坐标最大的点为其上顶点 $(0,1)$，……………………………………（2 分）

因为 l 经过点 $(0,1)$ 和 $M(1,0)$，所以 l 的斜率为 -1，即 $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$，……………………………………（3 分）

故其参数方程可写为 $\begin{cases}x=1+t\cos\dfrac{3\pi}{4},\\ y=t\sin\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}$（$t$ 为参数），即 $\begin{cases}x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）. ……………………（4 分）

注：答案不唯一，其他合理答案例如$\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）或$\begin{cases}x=1-t,\\ y=t\end{cases}$（$t$ 为参数）.

（Ⅱ）直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），

将其代入$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$中整理可得$(3-2\cos^2\alpha)t^2+2t\cos\alpha-2=0$， ……………………………… (6 分)

设 A,B 在 l 上对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=\dfrac{2\cos\alpha}{2\cos^2\alpha-3}$，且 t_1,t_2 符号相反， …………………… (7 分)

故$||MA|-|MB||=|t_1+t_2|=\left|\dfrac{2\cos\alpha}{2\cos^2\alpha-3}\right|=\dfrac{2}{5}$，……………………………………………………… (8 分)

解得 $\cos\alpha=\pm\dfrac{1}{2}$. ………………………………………………………………………………………… (10 分)

23. **命题意图** 本题考查绝对值不等式的解法以及基本不等式.

解析 （Ⅰ）由$f(x)<x$得$|x-1|+|x-2|<x$，

即$\begin{cases}x<1,\\ 3-2x<x,\end{cases}$或$\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2,\\ 1<x,\end{cases}$或$\begin{cases}x>2,\\ 2x-3<x,\end{cases}$

分别解得 $x\in\varnothing$或$1<x\leqslant 2$或$2<x<3$，…………………………………………………………… (3 分)

综上可得不等式$f(x)<x$的解集为$(1,3)$. ……………………………………………………………… (5 分)

（Ⅱ）由题意知$f(x)=\begin{cases}3-2x,x<1,\\ 1,1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2x-3,x>2,\end{cases}$所以$f(x)$的值域为$[1,+\infty)$. …………………………… (6 分)

因为 a,b 是正实数，所以 $a+1\geqslant 2\sqrt{a}$，$b+1\geqslant 2\sqrt{b}$，

所以 $a+b+2\geqslant 2\sqrt{a}+2\sqrt{b}$，…………………………………………………………………………… (8 分)

所以 $a+b\geqslant 2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2$，即$\dfrac{2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2}{a+b}\leqslant 1$，…………………………………………………… (9 分)

因此对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant\dfrac{2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2}{a+b}$恒成立，即该不等式解集为 $\mathbf{R}$. ………………………… (10 分)