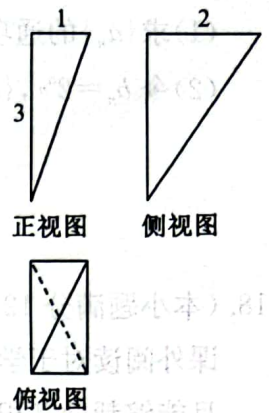


7. 放射性核素铯 89 的质量 M 会按某个衰减率衰减, 设初始质量为 M_0 , 质量 M 与时间 t (单位: 天) 的函数关系为 $M=M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$ (其中 h 为常数), 若铯 89 的半衰期(质量衰减一半所用的时间) 约为 50 天, 那么质量为 M_0 的铯 89 经过 30 天衰减后质量大约变为(参考数据: $2^{0.6} \approx 1.516$)
- A. $0.72M_0$ B. $0.70M_0$ C. $0.68M_0$ D. $0.66M_0$

8. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为
- A. 3 B. 2
C. 1 D. $\frac{1}{3}$



9. 若双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线被圆 $(x+2)^2 + y^2 = 4$ 所截得的弦长为 $2\sqrt{3}$, 则 C 的离心率为

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

10. 已知 $a = \ln \frac{1}{98} + \frac{97}{98}$, $b = \ln \frac{1}{99} + \frac{98}{99}$, $c = \ln \frac{1}{100} + \frac{99}{100}$, 则 a, b, c 的大小关系是

- A. $a > c > b$ B. $a > b > c$
C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

11. 若函数 $y = 4\sin \omega x$ 与 $y = 4\cos \omega x$ 图象的任意连续三个交点构成等腰直角三角形, 则正实数 $\omega =$

- A. $\frac{\sqrt{2}\pi}{8}$ B. $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$
C. $\frac{\pi}{4}$ D. π

12. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = -f(x)$, 函数 $f(x+1)$ 为偶函数, 且当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = \log_2(x+a)$, 则 $f(2022) + f(2023) =$

- A. -1 B. 1 C. 504 D. 505

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_3 + a_4 = 3(a_2 + a_3)$, 则 $\{a_n\}$ 的公比为 _____.
14. 已知向量 a, b 满足 $|a| = 1, b = (-1, \sqrt{3}), |2a - b| = 2\sqrt{3}$, 则 a, b 的夹角为 _____.
15. 已知抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 的焦点为 F , 过 F 的直线 l 与抛物线交于 A, B 两点, 且 $\vec{AF} = 4\vec{FB}$, O 为坐标原点, 则 $\triangle OAB$ 的面积为 _____.
16. 已知三棱锥 $S-ABC$ 中, $SA \perp$ 平面 $ABC, AB = BC = CA = 2$, 异面直线 SC 与 AB 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$, 则三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的表面积为 _____.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答。

(一)必考题:共 60 分。

17. (本小题满分 12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_2 + a_3 = 13$, $S_6 = 57$ 。

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

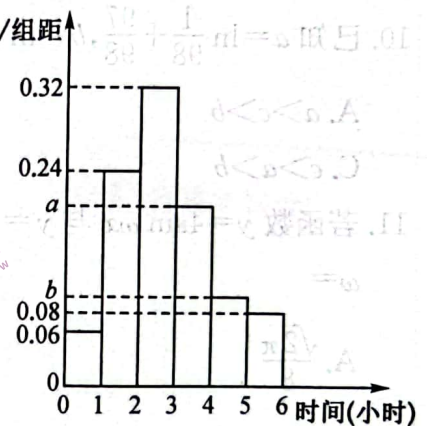
(2)令 $b_n = 2^{a_n}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ,求使得 $T_n > 10S_4$ 成立的 n 的最小值。

18. (本小题满分 12 分)

课外阅读对于学生的综合发展是非常有利的,课外阅读能够充分调动学生的写作积极性,并且能够帮助其积累丰富的阅读知识,将学生的学习效率最大化,全面提高学生的写作质量。某市为了解高中生课外阅读时间的情况,随机抽取了 1 000 名高中学生进行调查,得到了这 1 000 名学生的平均每周课外阅读时间(单位:小时),并将样本数据分成 $[0, 1]$, $(1, 2]$, $(2, 3]$, $(3, 4]$, $(4, 5]$, $(5, 6]$ 六组,绘制成如图所示的频率分布直方图,其中 $a = 2b$ 。

(1)求 a, b 的值;

(2)为进一步了解这 1 000 名学生的读书喜好,从平均每周课外阅读时间在 $(2, 3]$, $(5, 6]$ 两组内的学生中,采用比例分配的分层随机抽样方法抽取 10 人,再从这 10 人中随机抽取 3 人,记在这 3 人中,平均每周课外阅读时间在 $(2, 3]$ 内的学生人数为 X ,求 X 的分布列与数学期望。

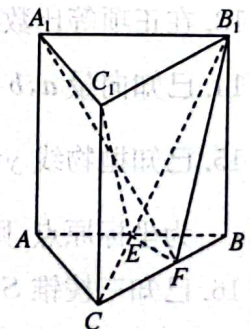


19. (本小题满分 12 分)

如图,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, E 为 AB 的中点,点 F 在 BC 上,且 $AC=BC=3BF$ 。

(1)证明: $A_1B_1 \perp C_1E$;

(2)若 $\angle ABC = 60^\circ$, $AA_1 = 2$, $AB = 2\sqrt{3}$,求二面角 $A_1 - B_1F - E$ 的正弦值。



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 E 的中心为坐标原点, 对称轴为 x 轴、 y 轴, 且过 $A(2, -1), B(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$ 两点.

(1) 求 E 的方程;

(2) 若直线 l 与圆 $O: x^2 + y^2 = \frac{8}{5}$ 相切, 且直线 l 交 E 于 M, N 两点, 试判断 $\angle MON$ 是否为定值? 若是, 求出该定值; 若不是, 请说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^{x-1} - a(x^2 - 1) - 1 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若 $a=2$, 求 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x) \geq 0$ 对任意的 $x \in [1, +\infty)$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 两题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 $l: mx + y - 2m = 0 (m \in \mathbf{R})$, 以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 圆 C 的极坐标方程为 $\rho = 4(\sin \theta + \cos \theta)$.

(1) 求直线 l 的极坐标方程和圆 C 的一个参数方程;

(2) 若直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 2\sqrt{6}$, 求 m 的值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x^2 - 1| + |x - 2|$.

(1) 解不等式 $f(x) \geq 3$;

(2) 若 $f(a) \leq |a^2 + a - 3|$, 求满足条件的实数 a 的取值范围.