数学参考答案

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	A	C	D	B	A	A

【解析】

1．因为 $\vec{a}/\!/\vec{b}$，所以 $-4=3k\Rightarrow k=-\dfrac{4}{3}$，故选 C．

2．集合 A 与集合 B 中的元素都是除 3 余 2 的数，集合 B 中的元素都在集合 A 中，集合 A 中有集合 B 中没有的元素，故选 B．

3．据题意 $\overrightarrow{OA}=(2,1),\overrightarrow{OC}=(-1,2),\overrightarrow{AB}=(1,-2)$，则 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-3,1)-(1,-2)$

$=(-4,3)$，那么 $z=-4+3\mathrm{i}$，所以 $z\cdot\bar{z}=25$，故选 A．

4．因为 $n=6$，所以 $(1+2x)^6$ 的展开式中二项式系数最大的项是第 4 项，即 $T_4=\mathrm{C}_6^3(2x)^3=160x^3$，故选 C．

5．$S_9-S_5=4$，即 $a_6+a_7+a_8+a_9=4$，所以 $a_7+a_8=2$，因为 $a_1=-25$，解得 $d=4$，所以 $a_n=4n-29$，根据等差数列的前 n 项和公式，求得 $S_n=2n^2-27n$，这是关于 n 的二次函数，开口向上，在 $n=\dfrac{27}{4}$ 处取得最小值，由于 $n\in\mathbf{N}^*$，最靠近 $\dfrac{27}{4}$ 的正整数为 7，所以当 $n=7$ 时，S_n 取得最小值，故选 D．

6．据题意 $V_9=V_0(1+r_a)^9=900\times10^8\mathrm{m}^3$，$V_{18}=V_0(1+r_a)^{18}=2880\times10^8\mathrm{m}^3$，两式相除可得 $(1+r_a)^9=3.2$，又因为 $V_{24}=V_{18}(1+r_a)^6=2880\times10^8\times(3.2)^{\frac{2}{3}}\approx6249.6\times10^8\mathrm{m}^3$，故选 B．

7．设 $A=$“一名妇女患乳腺癌”，$B=$“一名妇女的 X 光片呈阳性”．由题知 $P(A)=0.8\%$，$P(B|A)=90\%$，$P(B|\bar{A})=7\%$，可得 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=90\%\Rightarrow P(AB)=90\%\times0.8\%$，所求为 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$，根据全概率公式可得 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=$ $0.8\%\times90\%+99.2\%\times7\%=0.07664$，所以 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0.0072}{0.07664}\approx0.09$，故选 A．

【评析】本题来源于一个曾经的现象：医生了解临床测试的错误率和疾病的基本比例，但不知道怎样从中推出呈阳性病人的患病率，因此许多病人不得不承受不必要的治疗．据调查，在 48 名有相关经验的医生中，只有 2% 的人给出了正确答案．这是一个不太符合直觉的问题，需要用到数学当中的全概率公式，或者贝叶斯公式，通过严密的计算，才能得到正确的结果．

8．据题意，设直线 l: $y=k(x+2)$，两条渐近线满足方程 M: $\dfrac{x^2}{3}-y^2=0$，联立直线 l 与双曲线有 $x^2-3k^2(x^2+4x+4)-3=0$，整理得 $(1-3k^2)x^2-12k^2x-12k^2-3=0$，$\Delta_1=144k^4+$ $4(1-3k^2)(12k^2+3)=12k^2+12$，联立 l 与方程 M 有：$x^2-3k^2(x^2+4x+4)=0$，整理得 $(1-3k^2)x^2-12k^2x-12k^2=0$，

$\Delta_2=144k^4+48k^2(1-3k^2)=48k^2$，$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{\sqrt{\Delta_1}}{|1-3k^2|}$，$|DE|=\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{\sqrt{\Delta_2}}{|1-3k^2|}$，

$\therefore\dfrac{|AB|}{|DE|}=\sqrt{\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}}=\sqrt{\dfrac{k^2+1}{4k^2}}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，$\therefore k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，故选 A．

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11	12
答案	CD	ACD	BC	ACD

【解析】

9．由 $f(x+1)$ 是偶函数知 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，又 $f(x)$ 关于 $x=-1$ 对称，所以 $f(x)$ 的周期为 4，故 A 错误；无法求出 $f(1)=0$ 的值，故 B 错误；由 $g(x-2)$ 是奇函数知 $g(x)$ 关于 $(-2,\ 0)$ 对称，故 C 正确；$(-2,\ 0)$ 关于 $x=1$ 的对称点为 $(4,\ 0)$，所以 $g(4)=0$，故 D 正确，故选 CD.

10．设周期为 T，据题意 $\dfrac{T}{4}=\dfrac{7}{6}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow T=2\Rightarrow\omega=\pi$，频率为 $\dfrac{\omega}{2\pi}=\dfrac{1}{2}$，故 A 正确；当 $x=\dfrac{2}{3}$ 时，小球第一次到平衡位置，即 $\left(\dfrac{2}{3},\ 0\right)$ 是正弦函数减区间上的零点，且 $|\varphi|<\pi$，所以 $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}+\varphi\right)=0\Rightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，故 B 错误；根据图中的信息知 $(3,\ -5\sqrt{3})$ 在图象上，所以 $A\sin\left(3\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=-5\sqrt{3}\Rightarrow A=10$，故 C 正确；当 $x=\dfrac{2}{3}$ 时，小球第一次到达平衡位置，当 $x=\dfrac{2}{3}+2=\dfrac{8}{3}$ 时，小球第三次到达平衡位置，故 D 正确，故选 ACD.

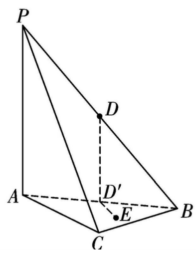
【评析】本题参考《课程标准》中的案例 4：用三角函数刻画事物周期变化的实例．将三角函数和物理当中的简谐运动结合起来，考察学生的综合能力．

11．若方程 C 表示的曲线是椭圆，则 $\begin{cases}m-2>0,\\6-m>0,\\m-2\neq6-m\end{cases}\Rightarrow m\in(2,\ 4)\cup(4,\ 6)$，故 A 错误；当 $m=3$ 时，方程是 C：$x^2+3y^2=1$，曲线是椭圆，设曲线上一点 $P\left(\cos\theta,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)$，则点 P 到直线 l：$x+y+2\sqrt{3}=0$ 距离为

$$d=\frac{\left|\cos\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta+2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{1+1}}=\frac{\left|\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin(\theta+\varphi)+2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

，故 B 正确；若方程 C 表示的是双曲线，则 $(m-2)(6-m)<0\Rightarrow(m-2)(m-6)>0\Rightarrow m\in(-\infty,\ 2)\cup(6,\ +\infty)$，故 C 正确；若方程 C 表示的是椭圆，但受到 m 的影响，椭圆的焦点可能在 x 轴上，也可能在 y 轴上，所以离心率的表达式有两个，故 D 错误，故选 BC.

12．如图 1，因为 $PA\perp$平面$ABC\Rightarrow PA\perp BC$，$PA=AB=BC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AC=2$，由勾股定理得 $AB^2+BC^2=AC^2$，所以 $BC\perp AB$，所以 $BC\perp$平面PAB，当 E 在线段 AB 上时，



$PE \subset$ 平面PAB，所以 $PE \perp BC$，故 A 正确；可以将三棱锥 $P-ABC$ 放入正方体中，易求出正方体外接球 O 的半径为 $\sqrt{3}$，故三棱锥外接球的半径为 $\sqrt{3}$，点 E 是球 O 表面或内部一点，点 F 是球 O 表面任意一点，所以 EF 的最大值为球的直径，即 $2\sqrt{3}$，故 B 错误；因为 $PA \perp$ 平面ABC，则点 D 在底面的投影为 AB 的中点 D'，则 $DE^2 = D'D^2 + D'E^2$，由图知，当点 E 与点 C 重合时，$D'E$ 取到最大值，$DE^2 = D'D^2 + D'E^2 = 1+5=6$，当点 E 与点 D' 重合时，DE 取到最小值，所以 $DE \in [1, \sqrt{6}]$，故 C 正确；记经过 DE 的平面为 α，当 $OD \perp \alpha$ 时，平面 α 与球 O 的截面面积最小，此时截面圆的半径为 $\sqrt{R^2 - OD^2} = \sqrt{2}$，所以截面面积为 2π，故 D 正确，故选 ACD.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	11	78	$\dfrac{9}{2\pi}$	$\sqrt{3}$

【解析】

13．据题意，记击中靶心的次数为 Y，则 Y 服从 $n=10,\ p=0.7$ 的二项分布，所以 $E(Y)=np=7$，$X=2Y-(10-Y)=3Y-10$，$\therefore E(X)=3E(Y)-10=11$．

14．如果甲没有搭档，自己一个人去某个市，那么这五个人去交流学习的不同方法数为 $C_4^1 \times C_3^3 \times A_3^3 + \dfrac{C_4^2 \times C_2^2}{A_2^2} \times A_3^3 = 42$；如果甲有搭档，可能 2 个人同行，则必须是甲和乙，也可能三个人同行，那么这五个人去交流学习的不同方法数为 $C_3^1 \times C_2^2 \times A_3^3 + \dfrac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{A_2^2} \times A_3^3 = 36$．所以总的方法数为 78．

15. 水流速度为 $r=2$，底面半径为 $a=2$，圆锥的高为 $b=3$，水深为 y，时间为 t．记经过时间 t 后，水的体积为 $V_{水}=rt$，有水部分的圆锥体积为 $V_{水}=\dfrac{a^2\pi y^3}{3b^2}$，解得 $t=\dfrac{a^2\pi y^3}{3rb^2}$，当 $y=1$ 时，$t_1=\dfrac{a^2\pi y^3}{3rb^2}=\dfrac{a^2\pi}{3rb^2}$，根据导数的实际意义知，水面上升的速率即 y 为关于 t 的导数，即 $y'=\dfrac{b^2r}{a^2\pi}\left(\dfrac{3b^2rt}{a^2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}$，所以当水深为 1dm 时，水面上升的速率为 $y'(t_1)=\dfrac{b^2r}{a^2\pi}\left(\dfrac{3b^2rt}{a^2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{b^2r}{a^2\pi}=\dfrac{9}{2\pi}$，所以水面上升的速率为 $\dfrac{9}{2\pi}$dm / 分．

16．设 $\alpha=\dfrac{A+B}{2},\ \beta=\dfrac{A-B}{2}$，则 $A=\alpha+\beta,\ B=\alpha-\beta$，且 $\alpha\in(0,\ \pi),\ \beta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，于是 $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)-\cos(2\alpha)=\dfrac{3}{2}$，所以 $2\cos\alpha\cos\beta-2\cos^2\alpha+1=\dfrac{3}{2}$，整理得 $\cos\alpha\cos\beta-\cos^2\alpha=\dfrac{1}{4}$，可视为关于 $\cos\alpha$ 的二次方程 $\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\dfrac{1}{4}=0$ 有解，那么 $\Delta=\cos^2\beta-1\geqslant 0$，由于 $\cos^2\beta\in(0,\ 1]$，所以

$\cos^2\beta=1$，则 $\cos\beta=\pm1$，因为 $\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，于是 $\cos\beta=1\Rightarrow A=B$，$\cos\alpha$ 满足 $\cos^2\alpha-\cos\alpha+\frac{1}{4}=0\Rightarrow\left(\cos\alpha-\frac{1}{2}\right)^2=0$，所以 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$A=B=\frac{\pi}{3}$，故 $\triangle ABC$ 是一个等边三角形，所以 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$.

四、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 10 分）

解：（1）$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}=\dfrac{4971}{5019.17}\approx0.9904>0.75$，

所以可以认为 x 和 y 有很强的线性相关关系．……………………………………………（4 分）

（2）据题意，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{4971}{4200}\approx1.18$，

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=54.4-\dfrac{4971}{4200}\times75\approx-34.37$，

所以回归方程为 $\hat{y}=1.18x-34.37$．……………………………………………………（10 分）

18.（本小题满分 12 分）

解：（1）A，B，C 为 $\triangle ABC$ 的三个内角，所以 A，B，$C\in(0,\pi)$，

因为 $\cos C=\frac{3}{4}$，所以 $\sin C=\frac{\sqrt{7}}{4}$，……………………………………………………（1 分）

记 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $R=2$，根据正弦定理有 $\dfrac{AB}{\sin C}=2R$，所以 $AB=\sqrt{7}$，

……………………………………………………………………………………………（2 分）

根据圆的性质知，圆心 O 在直线的投影为弦 AB 的中点，

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=\frac{7}{2}$，故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{7}{2}$．……………………………………（4 分）

（2）根据正弦定理得，$4(a^2-b^2)=3(a-b)b\cdot2R$，………………………………………（5 分）

若 $a=b$，则 $\triangle ABC$ 是一个等腰三角形，CD 是 $\angle ACB$ 角平分线，且 $CD\perp AB$，

由二倍角公式得 $2\cos^2\frac{C}{2}-1=\cos C=\frac{3}{4}$，因为 $\cos C>0$，所以 $\frac{C}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，

于是 $\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{\sqrt{7}}=\dfrac{\frac{AB}{2}}{|CD|}$，所以 $|CD|=\frac{7}{2}$；……………………………………（8 分）

若 $a\neq b$，则 $a=2b$，由余弦定理得 $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$，解得 $b=\frac{\sqrt{14}}{2}$，$a=\sqrt{14}$，

……………………………………………………………………………………………（9 分）

由等面积法得 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}$，

即 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}b\bullet|CD|\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{2}a\bullet|CD|\sin\frac{C}{2}$，

解得 $|CD|=\frac{7}{3}$. ……………………………………………………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

（1）解：构造等比数列为 $a_{n+1}-(n+1)=3(a_n-n)$，…………………………………（2 分）

故 $\{a_n-n\}$ 是以 $a_1-1=1$ 为首项，3 为公比的等比数列，

所以 $a_n-n=3^{n-1}\Rightarrow a_n=n+3^{n-1}$. …………………………………………………（4 分）

对 $\{a_n\}$ 进行分组求和，得到 $S_n=1+2+\cdots+n+3^0+3^1+\cdots+3^{n-1}=\frac{n(n+1)-1+3^n}{2}$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=\frac{n(n+1)-1+3^n}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

……………………………………………………………………………………………（6 分）

（2）证明：$b_n=\frac{2n-1}{a_{n+2}-n}=\frac{2n-1}{2+3^{n+1}}<\frac{2n-1}{3^{n+1}}=\frac{n}{3^n}-\frac{n+1}{3^{n+1}}$，

……………………………………………………………………………………………（9 分）

所以 $T_n<\frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^2}-\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^n}-\frac{n+1}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}-\frac{n+1}{3^{n+1}}<\frac{1}{3}$，故 $T_n<\frac{1}{3}$.

……………………………………………………………………………………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

（1）证明：当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，F 为棱 A_1B_1 中点，

取 BD 中点为 O，连接 OE，OA_1，则 $OE\underline{\mathbin{/\!/}}\frac{1}{2}AB$，

又 $A_1F\underline{\mathbin{/\!/}}\frac{1}{2}AB$，所以 $OE\underline{\mathbin{/\!/}}A_1F$，故 $OEFA_1$ 为平行四边形，则 $OA_1/\!/EF$，

又 $EF\not\subset$ 平面 A_1BD，所以 $EF/\!/$ 平面 A_1BD.

……………………………………………………………………………………………（4 分）

（2）解：当 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时，直线 BF 与平面 ECD_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{14}$，理由如下：

不妨设 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱长 $AB=2$，则 $BD=2$，

在 $\triangle ABA_1$ 中，$A_1B^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\frac{3}{4}=2$，故 $A_1B=\sqrt{2}$，同理可得，$A_1D=\sqrt{2}$，

则 $A_1O\perp BD$，则 $A_1O=A_1B^2-OB^2=1$，

在 $\triangle OAA_1$ 中，$OA=\sqrt{3}$，所以 $AA_1^2=OA_1^2+OA^2$，即 $OA_1\perp OA$，

又 $AC\perp BD$，以 O 为原点，建系 $O-xyz$ 如图 2，

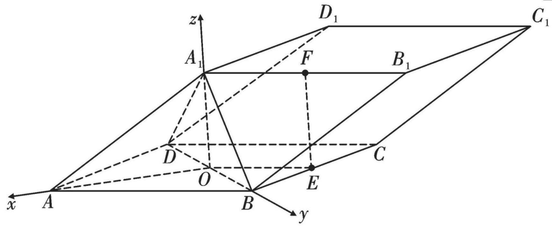


图 2

……………………………………………………………………………………（6 分）

$C(-\sqrt{3},\ 0,\ 0)$，$D_1(-\sqrt{3},\ -1,\ 1)$，$E\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$，$A_1(0,\ 0,\ 1)$，$B(0,\ 1,\ 0)$，$B_1(-\sqrt{3},\ 1,\ 1)$，

则 $\overrightarrow{A_1B}=(0,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{A_1B_1}=(-\sqrt{3},\ 1,\ 0)$，故 $\overrightarrow{A_1F}=\lambda\overrightarrow{A_1B_1}=(-\sqrt{3}\lambda,\ \lambda,\ 0)$，

所以 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{A_1F}-\overrightarrow{A_1B}=(-\sqrt{3}\lambda,\ \lambda-1,\ 1)$，

$\overrightarrow{CE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$，$\overrightarrow{CD_1}=(0,\ -1,\ 1)$，

设平面 ECD_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,\ y,\ z)$，则 $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=0,\\ -y+z=0,\end{cases}$ 解得 $\vec{n}=(-1,\ \sqrt{3},\ \sqrt{3})$，

……………………………………………………………………………………（9 分）

设直线 BF 与平面 ECD_1 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{BF},\ \vec{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{BF}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{BF}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|\sqrt{3}\lambda+\sqrt{3}(\lambda-1)+\sqrt{3}|}{\sqrt{3\lambda^2+(\lambda-1)^2+1}\cdot\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{14}$，

解得 $\lambda=-\frac{1}{2}$（舍）或 $\lambda=\frac{1}{3}$． …………………………………………………………（12 分）

21．（本小题满分 12 分）

解：（1）设动圆 P 的半径为 r，据题意 $|PF_1|=r+\frac{1}{2}$，$|PF_2|=\frac{7}{2}-r$，所以 $|PF_1|+|PF_2|=4$，$|PF_1|+|PF_2|>|F_1F_2|$，

根据椭圆的定义知，点 P 的轨迹是椭圆，轨迹方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．

……………………………………………………………………………………（4 分）

（2）设 $T(4,\ t)$，直线 AB 的斜率为 k_1，直线 DE 的斜率为 k_2，

则 l_{AB}：$y=k_1(x-4)+t$，l_{DE}：$y=k_2(x-4)+t$，

联立直线 AB 与曲线 C 的方程有：

$(3+4k_1^2)x^2+(8k_1t-32k_1^2)x+64k_1^2-32k_1t+4t^2-12=0$，

设 $A(x_A,\ y_A)$，$B(x_B,\ y_B)$，根据韦达定理知：

$x_A+x_B=\frac{32k_1^2-8k_1t}{3+4k_1^2}$，$x_Ax_B=\frac{64k_1^2-32k_1t+4t^2-12}{3+4k_1^2}$，

……………………………………………………………………（8分）

所以$|TA|=\sqrt{1+k_1^2}|x_A-4|=\sqrt{1+k_1^2}(4-x_A)$，$|TB|=\sqrt{1+k_1^2}|x_B-4|=\sqrt{1+k_1^2}(4-x_B)$，

则$|TA|\cdot|TB|=(1+k_1^2)[16-4(x_A+x_B)+x_Ax_B]$

$$=\frac{(1+k_1^2)[16(3+4k_1^2)-4(32k_1^2-8k_1t)+64k_1^2-32k_1t+4t^2-12]}{3+4k_1^2}$$

$$=\frac{(1+k_1^2)(36+4t^2)}{3+4k_1^2}$$，……………………………………………………（10分）

同理得$|TD|\cdot|TE|=\dfrac{(1+k_2^2)(36+4t^2)}{3+4k_2^2}$，

因为$|TA|\cdot|TB|=|TD|\cdot|TE|$，有$(1+k_1^2)(3+4k_2^2)=(1+k_2^2)(3+4k_1^2)$，

所以$k_1^2=k_2^2$，直线AB与直线DE不重合，则$k_1=-k_2$，

故直线AB的斜率与直线DE的斜率之和为0.

……………………………………………………………………（12分）

22.（本小题满分12分）

解：（1）当$a=1$时，$f(x)=x(e^x-1)$，$f'(x)=(x+1)e^x-1$，

令$g(x)=(x+1)e^x-1$，则$g'(x)=(x+2)e^x$，

令$g'(x)=0$，解得$x=-2$，$g(-2)=-e^{-2}-1<0$，

当$x\in(-\infty,-2)$，$g(x)$单调递减，则$g(x)<0$恒成立；

当$x\in(-2,+\infty)$，$g(x)$单调递增，且$g(0)=0$，

则当$x\in(-2,0)$，$g(x)<0$，$x\in(0,+\infty)$，$g(x)>0$.

综上，当$x\in(-\infty,0)$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x\in(0,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

故$f(x)$的极小值为$f(0)=0$，无极大值.

……………………………………………………………………（4分）

（2）原不等式等价于：$\forall x>0$，$x(e^x-a)-\dfrac{1}{a}\ln x\geqslant 1$恒成立，令$r(x)=x(e^x-a)-\dfrac{1}{a}\ln x$，

由$r(1)=e-a\geqslant 1$得，$a\leqslant e-1$；……………………………………（5分）

① 当$a=1$时，$r(x)=xe^x-x-\ln x$，则$r'(x)=(x+1)e^x-1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{(x^2+x)e^x-x-1}{x}$，

令$\varphi(x)=(x^2+x)e^x-x-1$，则$\varphi'(x)=(x^2+3x+1)e^x-1>0$，$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

又$\varphi(0)=-1<0$，$\varphi(1)=2e-2>0$，故存在唯一$x_0\in(0,+\infty)$使得$\varphi(x_0)=0$，

则$(x_0+1)e^{x_0}=1+\dfrac{1}{x_0}$，即$e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，$\ln x_0=-x_0$，

$r(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，

$r(x)_{\min}=r(x_0)=x_0e^{x_0}-x_0-\ln x_0=x_0\cdot\frac{1}{x_0}-x_0+x_0=1$，

则 $r(x)\geqslant 1$ 恒成立，符合题意；……………………………………………………（9 分）

② 当 $1<a\leqslant e-1$ 时，令 $t(a)=-xa-\ln x\cdot\frac{1}{a}+xe^x$，

当 $x\in(0,1)$，有 $-x<0$，$-\ln x>0$，故 $t(a)$ 在 $a\in(1,e-1]$ 上单调递减，

故 $t(a)<t(1)=-x-\ln x+xe^x=r(x)$，

由①得，$r(x)_{\min}=1$，所以 $t(a)<1$，不符合题意；

综上所述，a 的取值集合为 $\{1\}$．……………………………………………………（12 分）