昆明一中 2023 届高三第八次联考
数学参考答案

命题、审题组教师　杨昆华 彭力 顾先成 莫利琴 孙思应 梁云虹 丁茵 张远雄 崔锦 秦绍卫

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	C	D	A	D	B	B（D 也给分）

1. 解析：$B=\left\{y\left|y=2^x,x\in A\right.\right\}=\left\{\frac{1}{2},1,2,4\right\}$，所以 $A\cap B=\{1,2\}$，所以 ${}_B\left(A\cap B\right)=\left\{\frac{1}{2},4\right\}$，选 C.

2. 解析：依题意 $z^2=-4=4\mathrm{i}^2$，所以 $z=\pm2\mathrm{i}$，所以 $|z|=2$，则 $\frac{|z|}{1-\mathrm{i}}=\frac{2}{1-\mathrm{i}}=\frac{2(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=1+\mathrm{i}$，选 A.

3. 解析：对物理感兴趣的同学占 56%，对历史感兴趣的同学占 74%，这两组的比例数据都包含了既对物理感兴趣又对历史感兴趣的同学的比例，设既对物理感兴趣又对历史感兴趣的同学占该班学生总数的比例为 x，则对物理或历史感兴趣的同学的比例是 $56\%+74\%-x$，即 $56\%+74\%-x=90\%$，即 $x=40\%$，选 C.

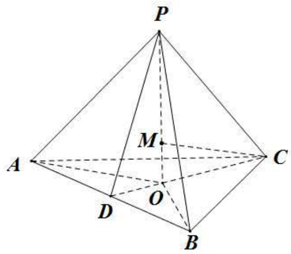
4. 解析：$\left(x^2-x+y\right)^6=\left[\left(x^2-x\right)+y\right]^6$，若先满足项 x^7y 中 y 的次数，则可以写出 $C_6^1\left(x^2-x\right)^5y$，其中 $\left(x^2-x\right)^5$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r\left(x^2\right)^{5-r}(-x)^r=(-1)^rC_5^rx^{10-r}$，令 $10-r=7$ 得 $r=3$，所以项 x^7y 的系数为 $C_6^1\cdot(-1)^3C_5^3=-60$，选 D.

5. 解析：由残差 $\hat{e}_i=y_i-\hat{y}_i$ 得 $-0.6=35-\hat{y}_7$，即 $\hat{y}_7=35.6$，所以 $35.6=7\hat{b}+\hat{a}$ ①，又 $\bar{x}=4$，$\bar{y}=23$，因为回归直线 $y=\hat{b}x+\hat{a}$ 经过中心点（$\bar{x}$，$\bar{y}$），所以 $23=4\hat{b}+\hat{a}$ ②，联立①②解得 $\hat{a}=6.2,\hat{b}=4.2$，所以 $\hat{a}+\hat{b}=10.4$，选 A.

6. 解析：由题意，$f(x)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)$，由 $f(0)=0$ 得 $\varphi=-\frac{2\pi}{3}+k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，又 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，选 D.

7. 解析：设△ AOF 的外接圆的圆心为 $B(x_0,y_0)$，则 $BO=BF=BA=3$，根据抛物线的定义及圆心 B 在 C 上得 $BF=x_0+\frac{p}{2}=3$，即 $x_0=3-\frac{p}{2}$，又由 $BO=BF$ 得 $x_0=\frac{p}{4}$，所以 $3-\frac{p}{2}=\frac{p}{4}$，即 $p=4$，选 B.

8. 解析：由已知得：$OA=OB=OC$，$PA=PB=PC$，连接 CO 并延长，交 AB 于点 D，
则 $PD\perp AB$，$CD\perp AB$，即二面角 $P-AB-C$ 的平面角为 $\angle PDC$，



由正三角形 ABC 的边长为 $2\sqrt{3}$，则 $OC=2OD=2$，

由三棱锥 $P-ABC$ 为正三棱锥，

则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的球心 M 在直线 PO 上，

由已知可得三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的半径为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

由 $MC^2=MO^2+OC^2$，解得 $MO=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$PO=2\sqrt{2}$，$PD=3$，

所以 $\cos\angle PDC=\frac{1}{3}$.

同理，外接球的球心 M 在三棱锥 $P-ABC$ 外时，$\cos\angle PDC=\frac{\sqrt{3}}{3}$.所以本题选 BD 均给分.

二、多选题

题号	9	10	11	12
答案	ABD	AD	BCD	AC

9. 解析：指标值 $x\in[205,215)$ 的样本频率是 $10\times0.024=0.24$，指标值在区间 $(205,215]$ 的产品约有 $200\times0.24=48$ 件，选项 A 正确；

抽取的产品的质量指标值的样本平均数和样本方差分别为：

$\bar{x}=170\times0.02+180\times0.09+190\times0.22+200\times0.33+210\times0.24+220\times0.08+230\times0.02=200$，

$s^2=(-30)^2\times0.02+(-20)^2\times0.09+(-10)^2\times0.22+0\times0.33+10^2\times0.24+20^2\times0.08+30^2\times0.02=150$，

选项 BD 正确；

由直方图可得出，从第一组至第七组的频率依次是 $0.02,0.09,0.22,0.33,0.24,0.08,0.02$，所以指标值的第 60 百分位数在 $[195,205)$ 内，设它等于 m，则 $(m-195)\times0.033=0.6-(0.02+0.09+0.22)$，解得 $m\approx203.18$，选项 C 错误；所以选 ABD.

10. 解析：对于 A，$\overrightarrow{AB}=(x,4),\overrightarrow{AC}=(-1,2)$，且 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC}$，所以 $2x=-4$，则 $x=-2$，A 正确；

对于 B，当 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$ 时，$0\le\angle BAC<\frac{\pi}{2}$，B 错误；

对于 C，在△ ABC 中，由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ 得 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$，即 $OB\perp CA$,同理 $OC\perp BA$，$OA\perp BC$，则 O 为△ ABC 的垂心，C 错误；

对于 D，由 $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 知 $AB=AC$，由 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$ 知 $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，则△ ABC 为等边三角形，D 正确；所以选 AD.

11. 解析：由 $f(x)=(x+1)e^x$，得 $f'(x)=(x+2)e^x$，当 $x=-2$ 时，$f'(-2)=0$；当 $x<-2$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；当 $x>-2$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增. $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to 0$；$x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$；$f(-2)=-\frac{1}{e^2}$, $f(-1)=0$,结合函数的图象，A 错误，所以选 BCD.

12. 解析：对于 A：$a^2+b^2=(1-2b)^2+b^2=5b^2-4b+1=5(b-\frac{2}{5})^2+\frac{1}{5}$，因为 $a>0$，$b>0$，且 $a+2b=1$，所以 $0<a<1$，$0<b<\frac{1}{2}$，所以当 $b=\frac{2}{5}$ 时，$a^2+b^2\ge\frac{1}{5}$，A 正确；

对于 B：$\frac{2b+1}{a+1}=\frac{2-a}{a+1}=-1+\frac{3}{a+1}(0<a<1)$，所以 $\frac{1}{2}<\frac{2b+1}{a+1}<2$，B 错误；

对于 C：$\frac{b}{a+b}+\frac{1}{b}=\frac{b}{a+b}+\frac{a+2b}{b}=\frac{b}{a+b}+\frac{a+b}{b}+1\ge 3$，当且仅当 $a+b=b$ 时等号成立，因为 $a+b\ne b$，所以等号不成立，C 正确；

对于 D：因为 $a>0$，$b>0$，且 $a+2b=1$，所以 $0<a<1$，$0<b<\frac{1}{2}$，令 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$，则 $e^{-\frac{1}{2}}>\frac{1}{4}$，$b<e^{a-1}$，D 错误，所以选 AC.

三、填空题

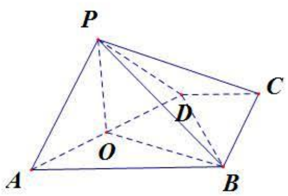
13. 解析：$1-\cos\theta+\sin\theta=\frac{8}{5}$，$\sin\theta-\cos\theta=\frac{3}{5}$，两边同时平方可得 $1-\sin 2\theta=\frac{9}{25}$，故 $\sin 2\theta=\frac{16}{25}$.

14. 解析：过 P 作 $PO\perp AD$ 交于点 O，连接 BO，

由已知可得 $PO\perp$ 平面$ABCD$，$PO\perp BO$，$PO\perp BD$，

又由 $AP\perp BD$，可得 $BD\perp$ 平面PAD，所以 $BD\perp AD$，

所以 $AD=2\sqrt{6}$，可求得：$PO=\sqrt{2}$，$OB=\sqrt{14}$，$PB=4$.



15. 解析：将抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 化为 $x^2=4y$，准线 l：$y=-1$，

所以椭圆 $C:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的一个焦点 $F(0,-1)$，即 $c=1$，

由 l 与 C 的一个交点为 $A(2,m)$ 得 $\frac{b^2}{a}=2$，即 $b^2=2a$，联立 $\begin{cases}c=1\\b^2=2a\\a^2=b^2+c^2\end{cases}$ 解得 $a=\sqrt{2}+1$，

所以椭圆 C 的长轴长 $2a=2\sqrt{2}+2$.

16. 解析：由题意，$f'(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+(a-1)\sin x+\frac{3}{2}\ge 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，即 $-\sin^2 x+(a-1)\sin x+2\ge 0$ 恒成立，令 $t=\sin x\in[-1,1]$，即 $-t^2+(a-1)t+2\ge 0$ 在 $t\in[-1,1]$ 上恒成立，设 $g(t)=-t^2+(a-1)t+2$，函数

$g(t)$在 $t\in[-1,1]$上，使不等式 $g(t)\ge 0$恒成立，只需$\begin{cases}g(-1)\ge 0,\\ g(1)\ge 0,\end{cases}$即$\begin{cases}-1-(a-1)+2\ge 0,\\ -1+(a-1)+2\ge 0,\end{cases}$解得 $0\le a\le 2$，

故实数 a的取值范围是$[0,2]$.

四、解答题

17. 解：（1）由题意得：$\begin{cases}a_2+a_3+a_4=39\\ 2(a_3+6)=a_2+a_4\end{cases}$，解得 $a_3=9$，

则 $a_2+a_4=30$，即 $a_3\left(\dfrac{1}{q}+q\right)=30$，解得：$q=3$或$\dfrac{1}{3}$，

因为 $q>1$，所以 $q=3$，$a_1=1$，

所以 $S_n=\dfrac{1\times(3^n-1)}{3-1}=\dfrac{3^n-1}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$. ………5 分

（2）假设存在常数 λ，使得数列$\{S_n+\lambda\}$为等比数列，

则 $(S_2+\lambda)^2=(S_1+\lambda)(S_3+\lambda)$，即 $(4+\lambda)^2=(1+\lambda)(13+\lambda)$，

解得：$\lambda=\dfrac{1}{2}$，此时 $S_n+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3^n}{2}$，

所以 $\dfrac{S_{n+1}+\frac{1}{2}}{S_n+\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}\times 3^{n+1}}{\frac{1}{2}\times 3^n}=3$，

所以存在 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，使得数列$\left\{S_n+\dfrac{1}{2}\right\}$为等比数列. ………10 分

18. 解：（1）因为 $\dfrac{\cos A}{1+\sin A}=\dfrac{2\sin^2 B}{2\sin B\cos B}=\dfrac{\sin B}{\cos B}$，

所以 $\sin B=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos(A+B)=-\cos C$，

因为 $B=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $\cos C=-\dfrac{1}{2}$，而 $0<C<\pi$，所以 $C=\dfrac{2\pi}{3}$. ………6 分

（2）由（1）得：$\sin B=-\cos C>0$，所以 $\dfrac{\pi}{2}<C<\pi$，$0<B<\dfrac{\pi}{2}$，

因为 $\sin B=-\cos C=\sin\left(C-\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $C=\dfrac{\pi}{2}+B$，所以 $A=\dfrac{\pi}{2}-2B$，

由正弦定理得：$\dfrac{c^2}{a^2+b^2}=\dfrac{\sin^2 C}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\dfrac{\cos^2 B}{\cos^2 2B+1-\cos^2 B}=\dfrac{\cos^2 B}{(2\cos^2 B-1)^2+1-\cos^2 B}$，

因为$0<B<\frac{\pi}{2}$，所以$\cos B\neq 0$，

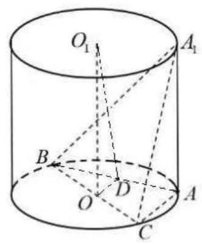
所以$\frac{\cos^2 B}{(2\cos^2 B-1)^2+1-\cos^2 B}=\frac{1}{\frac{(2\cos^2 B-1)^2+1-\cos^2 B}{\cos^2 B}}$，

因为$\frac{(2\cos^2 B-1)^2+1-\cos^2 B}{\cos^2 B}=4\cos^2 B+\frac{2}{\cos^2 B}-5\geq 2\sqrt{8}-5=4\sqrt{2}-5$，

当且仅当$\cos^2 B=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号，所以$\frac{c^2}{a^2+b^2}$的最大值为$\frac{4\sqrt{2}+5}{7}$，

所以$\frac{4\sqrt{2}+5}{7}\leq m$，所以实数$m$的最小值为$\frac{4\sqrt{2}+5}{7}$.　　　　………12 分

19. 解：（1）当点D为AB的中点时，O_1D∥平面A_1AC，证明如下：



因为O，D分别为BC，AB的中点，

则OD∥AC，$OD\not\subset$平面A_1AC，$AC\subset$平面A_1AC，

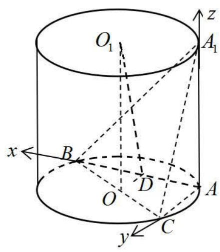
所以OD∥平面A_1AC，同理可得，OO_1∥平面A_1AC，

又$O_1O\cap OD=O$，所以平面OO_1D∥平面A_1AC，

由于$O_1D\subset$平面OO_1D，所以O_1D∥平面A_1AC.　　　　………6 分

（2）由题意，BC是⊙O的直径，得$\angle BAC=90^\circ$，又$BC=2$，则$AB=\sqrt{3}$，$AC=1$，

由于AB，AC，AA_1两两垂直，点A_1，A，B，C都在半径为$\sqrt{2}$的球面上，



则$AB^2+AC^2+AA_1^2=(2\sqrt{2})^2$，可得$AA_1=2$，

以A为原点，AB，AC，AA_1所在直线分别为x，y，z轴建立直角坐标系，

则$A(0,0,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，$A_1(0,0,2)$，

得$\overrightarrow{A_1B}=(\sqrt{3},0,-2)$，$\overrightarrow{A_1C}=(0,1,-2)$，

设$\vec{n}=(x,y,z)$为平面A_1BC的一个法向量，则$\begin{cases}\overrightarrow{A_1B}\cdot\vec{n}=\sqrt{3}x-2z=0\\ \overrightarrow{A_1C}\cdot\vec{n}=y-2z=0\end{cases}$，得$\vec{n}=(2,2\sqrt{3},\sqrt{3})$，

又$\overrightarrow{AC}=(0,1,0)$为平面$A_1AB$的一个法向量，

设二面角$C-A_1B-A$夹角为θ，则$\cos\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{AC},\vec{n}\rangle\right|=\frac{2\sqrt{57}}{19}$，

所以二面角 $C-A_1B-A$ 夹角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{57}}{19}$.　　　　………12 分

20. 解：（1）由散点图可知，选择回归方程类型 $y=c+d\ln x$ 更适合；………2 分

（2）令 $\omega=\ln x$，先建立 y 与 ω 的线性回归方程，

由于 $\hat{d}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}(\omega_i-\overline{\omega})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{10}(\omega_i-\overline{\omega})^2}=\dfrac{66}{6.6}=10$，所以 $\hat{c}=\overline{y}-d\overline{\omega}=30.3-10\times2=10.3$，

所以 y 与 ω 的线性回归方程为 $\hat{y}=10.3+10\omega$，

故 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=10.3+10\ln x$.

令 $x=28$，代入回归方程可得 $\hat{y}=10.3+10\ln 28=10.3+10\times(2\ln 2+\ln 7)\approx 43.6$（千件），

所以预测观看人次为 280 万人时的销售量约为 43600 件；　　　　………8 分

（3）由散点图可知，这 10 名主播中，优秀主播的个数有 4 个，所以 X 的可能取值为 0，1，2，3，

所以 $P(X=0)=\dfrac{C_6^3C_4^0}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{6}$，$P(X=1)=\dfrac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{2}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\dfrac{3}{10}$，$P(X=3)=\dfrac{C_6^0C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{30}$，

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

数学期望 $E(X)=0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{3}{10}+3\times\dfrac{1}{30}=\dfrac{6}{5}$.　　　　………12 分

21. 解：（1）将 $y=0$ 代入直线 $l:y=\sqrt{2}x+\sqrt{6}$ 中，解得 $x=-\sqrt{3}$，所以 $c=\sqrt{3}$，又因为 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $a=\sqrt{2},b=1$，即双曲线方程 $C:\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$；……5 分

（2）当过点 $P(x_0,y_0)$ 的两条切线斜率都存在时，设直线的方程为 $l_1:y=tx+m$，

联立 $\begin{cases}y=tx+m,\\ \dfrac{x^2}{2}-y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1-2t^2)x^2-4tmx-2m^2-2=0$，因为 $1-2t^2\neq0$，

令 $\Delta=0$，有 $16t^2m^2-4(1-2t^2)(-2m^2-2)=0\Rightarrow 2t^2-m^2-1=0$，

由于点 $P(x_0,y_0)$ 在直线 l_1 上，所以 $m=y_0-tx_0$，代入上式得 $(2-x_0^2)t^2+2x_0y_0t-y_0^2-1=0$，

设两条切线的斜率分别为 t_1,t_2，所以 $t_1t_2=\dfrac{y_0^2+1}{x_0^2-2}=-1$，化简得 $x_0^2+y_0^2=1$；

过点 $P(x_0,y_0)$ 的其中一条切线斜率不存在时，也满足 $x_0^2+y_0^2=1$，即点 P 一定在圆 $x^2+y^2=1$ 上，

设过点 $N(\sqrt{5},0)$ 的直线方程为 $l':y=kx-\sqrt{5}k$，则有 $d=\dfrac{|\sqrt{5}k|}{\sqrt{k^2+1}}\le r=1\Rightarrow -\dfrac{1}{2}\le k\le\dfrac{1}{2}$.

所以 $k\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ ......12 分

22. 解：（1）因为 $f(x)=e^x-1-ax$，则 $f'(x)=e^x-a$，

当 $a\le1$，则 $f'(x)\ge0$，$f(x)=e^x-1-ax$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增，而 $f(0)=0$，所以 $f(x)\ge0$；

当 $a>1$，则当 $x\in(0,\ln a)$，$f'(x)=e^x-a<0$，即 $f(x)=e^x-1-ax$ 在 $x\in(0,\ln a)$ 单调递减，$f(x)<f(0)=0$，不符合题意，

综上可得 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$. ·········6 分

（2）证明：$f(x)\ge\dfrac{x^2}{\ln(x+m)}-ax\Leftrightarrow\dfrac{e^x-1}{x}\ge\dfrac{x}{\ln(x+m)}$.

只需证 $\dfrac{e^x-1}{x}\ge\dfrac{x}{\ln(x+1)}$，即证 $\dfrac{e^x-1}{x}\ge\dfrac{e^{\ln(x+1)}-1}{\ln(x+1)}$，

设 $g(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$，所以 $g'(x)=\dfrac{(x-1)e^x+1}{x^2}$，令 $h(x)=(x-1)e^x+1$，因为 $h'(x)=xe^x\ge0$，

所以 $h(x)=(x-1)e^x+1$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增，所以 $h(x)\ge h(0)=0$，所以 $g'(x)\ge0$，

所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增，所以 $\dfrac{e^x-1}{x}\ge\dfrac{e^{\ln(x+1)}-1}{\ln(x+1)}\Leftrightarrow g(x)\ge g(\ln(x+1))\Leftrightarrow x\ge\ln(x+1)$

令 $t(x)=x-\ln(x+1)$，$t'(x)=1-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{x+1}\ge0$，

所以 $t(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $t(x)>t(0)=0$，即 $x\ge\ln(x+1)$ 成立,

所以 $f(x)\ge\dfrac{x^2}{\ln(x+m)}-ax$ 成立. ·········12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。