参考答案及解析

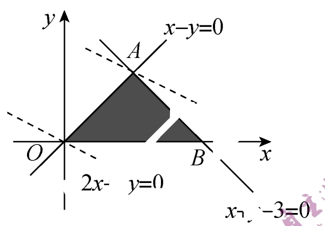
理科数学(一)

一、选择题

1. C 【解析】由已知得 $M\cup N=\{1,2,3,4,6,8,10\}$，全集 $I=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，故 $\complement_I(M\cup N)=\{0,5,7,9\}$.

2. B 【解析】因为 $z=\frac{a+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(a+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{a+2}{2}+\frac{2-a}{2}\mathrm{i}$，所以 $\left(\frac{a+2}{2}\right)^2+\left(\frac{2-a}{2}\right)^2=10$，解得 $a=\pm4$.代入检验知，$a=-4$ 符合题意.

3. C 【解析】画出约束条件表示的可行域如图中阴影部分所示，目标函数 $z=2x+3y$，可化为 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$，当直线 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$ 过点 A 时，在 y 轴上的截距最大，此时目标函数取得最大值.又由 $\begin{cases}x+y-3=0,\\x-y=0,\end{cases}$ 解得 $A\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$，所以目标函数 $z=2x+3y$ 的最大值为 $z_{\max}=2\times\frac{3}{2}+3\times\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$.



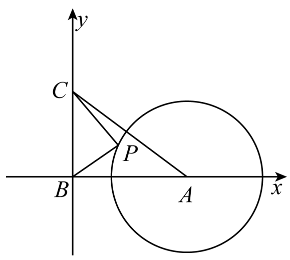
4. A 【解析】由题意得 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x$，令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2\geqslant2\sqrt{\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{-x}}-2=0$(当且仅当 $x=0$ 时，等号成立)，可知 $f'(x)$ 为增函数.当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>f'(0)=0$，则 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上为增函数，故排除选项 BD；又 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，故排除选项 C.

5. A 【解析】当 $0<\alpha<1$ 时，幂函数 $y=x^\alpha$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数，所以 $0.3^{0.2}>0.2^{0.2}$；当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，所以 $0.2^{0.2}>0.2^{0.3}$，所以 $a>b$.因为 $-\frac{1}{5\ln0.3}<-\frac{1}{5\ln\frac{1}{3}}<-\frac{1}{5\ln\frac{1}{\mathrm{e}}}=\frac{1}{5}=0.2<0.2^{0.3}$，所以 $b>c$，故 $a>b>c$.

6. B 【解析】因为 $S_{1\,023}-S_{1\,000}=a_{1\,001}+a_{1\,002}+\cdots+a_{1\,023}=23a_{1\,012}=1$，所以 $a_{1\,012}=\frac{1}{23}$，故 $S_{2\,023}=\frac{a_1+a_{2\,023}}{2}\times2\,023=a_{1\,012}\times2\,023=\frac{2\,023}{23}$.

7. D 【解析】因为 $xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=4$，当且仅当 $x=y=2$ 时，等号成立，所以 A 正确；因为 $\frac{x^2+y^2}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=4$，所以 $x^2+y^2\geqslant8$，当且仅当 $x=y=2$ 时，等号成立，所以 B 正确；因为 $\frac{x}{4-x}+\frac{y}{4-y}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=2$，当且仅当 $x=y=2$ 时等号成立，所以 C 正确；因为 $x^2-2y=x^2-2(4-x)=x^2+2x-8=(x+1)^2-9$，又 $x+y=4$，且 $x>0,y>0$，所以 $0<x<4$，因为函数 $f(x)=(x+1)^2-9$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)\in(-8,16)$，所以 D 不正确.

8. B 【解析】如图，以 B 为坐标原点，$\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴的正方向，建立平面直角坐标系，则 $B(0,0),A(\sqrt{7},0),C(0,2)$.设 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=x^2+y^2-2y=x^2+(y-1)^2-1$.因为 $|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{2}$，所以 P 是圆 $A:(x-\sqrt{7})^2+y^2=2$ 上的点.又点 P 与点 $(0,1)$ 距离的最大值为 $\sqrt{2}+\sqrt{7+1}=3\sqrt{2}$，即 $x^2+(y-1)^2\leqslant(3\sqrt{2})^2=18$，所以 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}\leqslant17$.故 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}$ 的最大值为 17.

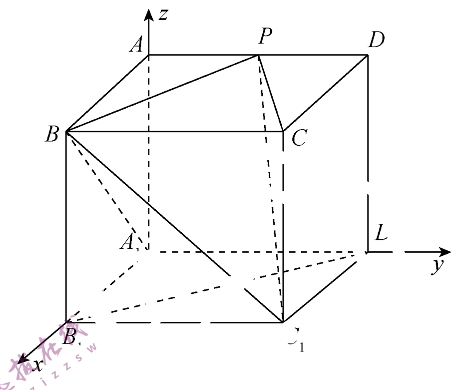


9. A 【解析】因为 $\sin2x+\cos^2x=2\sin x\cos x+\cos^2x=\frac{2\sin x\cos x+\cos^2x}{\sin^2x+\cos^2x}=\frac{2\tan x+1}{\tan^2x+1}=-\frac{3}{5}$，整理得 $3\tan^2x+10\tan x+8=0$，解得 $\tan x=-2$ 或 $\tan x=-\frac{4}{3}$.当 $\tan x=-2$ 时，$\tan2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2x}=\frac{2\times(-2)}{1-(-2)^2}=\frac{4}{3}$；当 $\tan x=-\frac{4}{3}$ 时，$\tan2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2x}=\frac{2\times\left(-\frac{4}{3}\right)}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{24}{7}$.

10. C 【解析】连接 AM.由渐近线的定义,得 $M(a,b)$.由 $\angle FNA=90°$,得 $|ON|^2=|OF|\cdot|OA|$,即 $|ON|=\sqrt{ac}$.因为 $ON\parallel AM$,所以 $\frac{|ON|}{|AM|}=\frac{|OF|}{|AF|}$,即 $\frac{\sqrt{ac}}{b}=\frac{c}{c+a}$,化简得 $c^2-2ac-a^2=0$,两边同除以 a^2,得 $e^2-2e-1=0$,解得 $e=1+\sqrt{2}$($1-\sqrt{2}$舍去).

11. A 【解析】因为 $a_{n+1}+a_n=2n+1$,所以 $a_{n+1}-(n+1)=-(a_n-n)$,且 $a_1-1=-2$,即 $\{a_n-n\}$是以-2为首项,-1 为公比的等比数列,所以 $a_n-n=-2\cdot(-1)^{n-1}=2\times(-1)^n$,即 $a_n=n+2\times(-1)^n$.当 n 为偶数时,$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$,当 n 为奇数时,$S_n=\frac{n(n+1)}{2}-2$.又 $S_{n+1}+S_n=2S_n+a_{n+1}$,当 n 为偶数时,由 $2S_n+a_{n+1}=2\times\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)+2\times(-1)^{n+1}=2\ 399$,得 $n^2+2n-2\ 400=0$,解得 $n=48$ 或 $n=-50$(舍去);当 n 为奇数时,由 $2S_n+a_{n+1}=2\times\frac{n(n+1)}{2}-4+(n+1)+2\times(-1)^{n+1}=2\ 399$,得 $n^2+2n-2\ 400=0$,解得 $n=48$(舍去)或 $n=-50$(舍去).综上可知,$n=48$.

12. C 【解析】以 A_1 为坐标原点,分别以 A_1B_1,A_1D_1,A_1A 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,设正方体的棱长为 1,$P(0,a,1)$,$a\in[0,1]$,则$\overrightarrow{A_1B}=(1,0,1)$,$\overrightarrow{C_1P}=(0,a,1)-(1,1,0)=(-1,a-1,1)$.因为$\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{C_1P}=(1,0,1)\cdot(-1,a-1,1)=-1+0+1=0$,所以 $A_1B\perp PC_1$,故①正确;因为$\overrightarrow{B_1D_1}=(0,1,0)-(1,0,0)=(-1,1,0)$,所以 $\cos\langle\overrightarrow{C_1P},\overrightarrow{B_1D_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{C_1P}\cdot\overrightarrow{B_1D_1}}{|\overrightarrow{C_1P}||\overrightarrow{B_1D_1}|}=\frac{a}{\sqrt{2}\times\sqrt{2+(a-1)^2}}=\frac{a}{\sqrt{2}\times\sqrt{a^2-2a+3}}$,当 $a=0$ 时,$\cos\langle\overrightarrow{C_1P},\overrightarrow{B_1D_1}\rangle=0$,所以此时异面直线 C_1P 与 B_1D_1 所成的角为$\frac{\pi}{2}$;当 $a\in(0,1]$ 时,$\frac{a}{\sqrt{2}\times\sqrt{a^2-2a+3}}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{1-\frac{2}{a}+\frac{3}{a^2}}}$.令 $f(a)=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{1-\frac{2}{a}+\frac{3}{a^2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{3\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}}}$,$\frac{1}{a}\in[1,+\infty)$,则$f(a)\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$,所以 $\cos\langle\overrightarrow{C_1P},\overrightarrow{B_1D_1}\rangle\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$,所以异面直线 C_1P 与 B_1D_1 所成角的取值范围为$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$.综上可知异面直线 C_1P 与 B_1D_1 所成角的取值范围为$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$,故②正确;若 $BP\perp$平面 CC_1P,则 $BP\perp CP$,因为$\overrightarrow{CP}=(0,a,1)-(1,1,1)=(-1,a-1,0)$,$\overrightarrow{BP}=(0,a,1)-(1,0,1)=(-1,a,0)$,所以$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=(-1,a,0)\cdot(-1,a-1,0)=1+a^2-a=0$,因为方程 $a^2-a+1=0$ 无实数解,所以 $BP\perp CP$ 不成立,故③不正确;因为 $V_{三棱锥B-PCC_1}=V_{三棱锥P-BCC_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCC_1}\times DC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{1}{6}$,故④正确.



二、填空题

13. -3【解析】由条件可知,$f'(x)=2x+2f'(1)+\frac{1}{x}$,则 $f'(1)=2+2f'(1)+1$,解得 $f'(1)=-3$.

14. -100【解析】因为$(x-2y)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=(-2)^rC_6^rx^{6-r}y^r$,所以$(x+y)(x-2y)^6$ 的展开式中含 x^4y^3 项的系数为$(-2)^3C_6^3+(-2)^2C_6^2=-100$.

15. 0【解析】根据题意,$f(x+1)$为奇函数,所以 $f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称,故 $f(1)=0$.又因为 $f(x)$为偶函数,所以 $f(-x+1)=-f(x+1)=f(x-1)$,则 $f(x+2)=-f(x)$,所以 $f(x+4)=f(x)$,即 $f(x)$是周期为 4 的周期函数.所以 $f(2\ 023)=f(4\times506-1)=f(-1)=f(1)=0$.

16. 1【解析】设 $A\left(x_1,\frac{x_1^2}{2p}\right)$,$B\left(x_2,\frac{x_2^2}{2p}\right)$,显然,直线 AB 的斜率存在,且 $k=\frac{\frac{x_2^2}{2p}-\frac{x_1^2}{2p}}{x_2-x_1}=\frac{x_2+x_1}{2p}$,则直线 AB 的方程为 $y=\frac{x_1+x_2}{2p}x+2$.联立$\begin{cases}y=\frac{x_1+x_2}{2p}x+2,\\x^2=2py,\end{cases}$整理得 $x^2-(x_1+x_2)x-4p=0$,则 $x_1x_2=-4p$,由 $x^2=2py$,得 $y=\frac{x^2}{2p}$,求导得 $y'=\frac{x}{p}$,故切线 AM 的方程为 $y-\frac{x_1^2}{2p}=\frac{x_1}{p}(x-x_1)$,即 $y=\frac{x_1}{p}x-\frac{x_1^2}{2p}$ ①,同理可得切线 BM 的方程为 $y=\frac{x_2}{p}x-\frac{x_2^2}{2p}$ ②,两式相减,得 M 的横坐标 $a=\frac{x_1+x_2}{2}$,两式相加,得 M 的纵坐标 $b=\frac{x_1+x_2}{2p}x-\frac{x_1^2+x_2^2}{4p}=\frac{(x_1+x_2)^2}{4p}-\frac{x_1^2+x_2^2}{4p}=$

$\frac{2x_1x_2}{4p}=\frac{-8p}{4p}=-2$.由 $a+b=-1$,得 $a=1$,所以 $M(1,-2)$,$l_{AB}:y=\frac{1}{p}x+2$,即 $x-py+2p=0$,所以点 M 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|1+4p|}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$,所以 $7p^2+16p-23=0$,解得 $p=1$ 或 $p=-\frac{23}{7}$(舍去).

三、解答题

17. **解**:(1)由题意知 $AB=c=2b$,$AD=\frac{\sqrt{17}}{6}c=\frac{\sqrt{17}}{3}b$,$BD=\frac{a}{3}$.

在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理,得 $\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{4b^2+a^2-b^2}{2\times 2b\times a}=\frac{a^2+3b^2}{4ab}$; (3 分)

在 $\triangle ABD$ 中,由余弦定理,得 $\cos B=\frac{AB^2+BD^2-AD^2}{2AB\cdot BD}=\frac{4b^2+\frac{a^2}{9}-\frac{17}{9}b^2}{2\times 2b\times\frac{a}{3}}=\frac{a^2+19b^2}{12ab}$,

则 $\frac{a^2+3b^2}{4ab}=\frac{a^2+19b^2}{12ab}$,整理得 $a^2=5b^2$,

所以 $b^2+c^2=a^2$,故 $\angle BAC=90^\circ$. (6 分)

(2)由 $a=\sqrt{5}$ 及(1),得 $b=1$,$c=2$,则 $\cos C=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

在 $\triangle AEC$ 中,$CE=\frac{\sqrt{5}}{3}$,由余弦定理,得 $AE^2=AC^2+CE^2-2AC\cdot CE\cos C=1^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2-2\times 1\times\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{8}{9}$,则 $AE=\frac{2\sqrt{2}}{3}$; (9 分)

由正弦定理,得 $\frac{AC}{\sin\angle AEC}=\frac{AE}{\sin C}$,

则 $\sin\angle AEC=\frac{AC}{AE}\cdot\sin C=\frac{3}{2\sqrt{2}}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,

故 $\triangle ADE$ 的外接圆的直径为 $2R=\frac{AD}{\sin\angle AED}=\frac{\frac{\sqrt{17}}{6}c}{\sin\angle AEC}=\frac{\frac{\sqrt{17}}{6}\times 2}{\frac{3\sqrt{10}}{10}}=\frac{\sqrt{170}}{9}$. (12 分)

18. **解**:(1)由题意可知,注射甲药物的患者共 100 人,治疗效果明显的有 76 人,故注射甲药物治疗效果明显的概率为 $P_1=\frac{76}{100}=\frac{19}{25}$; (2 分)

注射乙药物的患者共 100 人,治疗效果明显的有 84 人,故注射乙药物治疗效果明显的概率为 $P_2=\frac{84}{100}=\frac{21}{25}$. (4 分)

(2)由表中的数据可知,

$K^2=\frac{200\times(76\times 16-84\times 24)^2}{160\times 40\times 100\times 100}=2$. (6 分)

因为 $2<2.706$,

所以没有 90% 的把握认为甲、乙两种药物对治疗该种疾病的效果有差异. (7 分)

(3)从样本中对甲、乙两种药物治疗效果不明显的患者中按分层抽样的方法抽出 5 名患者,则应从甲、乙两种药物治疗效果不明显的患者中分别抽取 3 人,2 人,

随机变量 X 的所有可能取值为 1,2,3, (8 分)

则 $P(X=1)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$,$P(X=2)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{3}{5}$,

$P(X=3)=\frac{C_3^3C_2^0}{C_5^3}=\frac{1}{10}$, (10 分)

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

(11 分)

故 $E(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=\frac{9}{5}$. (12 分)

19. **解**:(1)因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $AB/\!/CD$,

又 $CD\subset$ 平面 $CDEG$,$AB\not\subset$ 平面 $CDEG$,

所以 $AB/\!/$ 平面 $CDEG$.

同理可得 $AF/\!/$ 平面 $CDEG$.

又 $AB\cap AF=A$,AB,$AF\subset$ 平面 ABF,

所以平面 $ABF/\!/$ 平面 $CDEG$.

又平面 $BGEF\cap$ 平面 $CDEG=EG$,平面 $BGEF\cap$ 平面 $ABF=BF$,

所以 $EG/\!/BF$.

同理可得 $BG/\!/EF$.

所以四边形 $BGEF$ 是平行四边形. (2 分)

如图,连接 FG,BE 交于点 M,连接 AC,BD 交于点 N,连接 MN.设 $AF=a$,$CG=b$,则 $DE=2MN=AF+CG=a+b$.延长 EG,DC 交于点 Q,连接 BQ.

因为 $AH/\!/$ 平面 $BGEF$,$AH\subset$ 平面 $ABQD$,平面 $ABQD\cap$ 平面 $BQEF=BQ$,

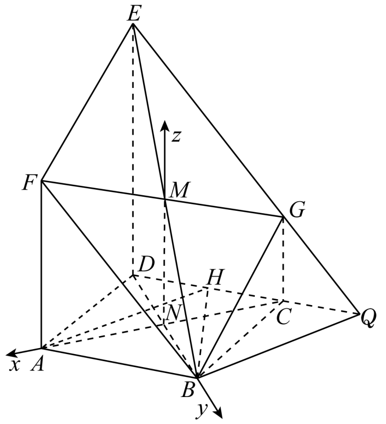
所以 $AH/\!/BQ$.

又 $AB/\!/HQ$,所以四边形 $AHQB$ 为平行四边形,则 $HQ=AB=CD$.

因为 H 为 CD 的中点,所以 $QC=CH=HD$. (4 分)

因为 $CG/\!/DE$,所以 $\frac{CG}{DE}=\frac{QC}{QD}=\frac{1}{3}$,

即 $\frac{b}{a+b}=\frac{1}{3}$,得 $a=2b$,即 $\frac{AF}{CG}=2$. (5 分)



(2)由(1)知,MN,AC,BD 两两垂直,故以 N 为坐标原点,$\overrightarrow{NA}$,$\overrightarrow{NB}$,$\overrightarrow{NM}$ 的方向分别为 x,y,z 轴的正方向,建立空间直角坐标系如图所示,则 $B(0,1,0)$,$H\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$,$F(\sqrt{3},0,2)$,$G(-\sqrt{3},0,1)$,所以 $\overrightarrow{BF}=(\sqrt{3},-1,2)$,$\overrightarrow{BG}=(-\sqrt{3},-1,1)$,$\overrightarrow{BH}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0\right)$. （7 分）

设平面 $BGEF$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BG}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}x-y+2z=0,\\ -\sqrt{3}x-y+z=0.\end{cases}$

取 $x=\sqrt{3}$,得 $y=-9$,$z=-6$,则 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-9,-6)$ 是平面 $BGEF$ 的一个法向量. （9 分）

故直线 BH 与平面 $BGEF$ 所成角的正弦值为

$$|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{BH}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BH}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{BH}|}=\frac{\left|-\frac{3}{2}+\frac{27}{2}\right|}{\sqrt{120}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

（12 分）

20. (1)**证明**:因为 $g(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}=(x-1)e^x-\frac{x^2}{2}$,所以 $g'(x)=xe^x-x=x(e^x-1)$, （1 分）

当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$e^x-1<0$,则 $x(e^x-1)>0$;

当 $x\in[0,+\infty)$ 时,$e^x-1\geqslant 0$,则 $x(e^x-1)\geqslant 0$,

所以 $g'(x)\geqslant 0$ 恒成立,

故 $g(x)$ 是增函数. （4 分）

(2)**解**:设 $m(x)=\ln(x+1)-x$,$x>0$,

则 $m'(x)=\frac{1}{x+1}-1=-\frac{x}{x+1}<0$,

所以 $m(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上为减函数,

则 $m(x)<m(0)=0$,即 $\ln(x+1)<x$.

因为 $f'(x)=xe^x$,当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$e^x>1$,所以 $x<f'(x)$.

故当 $a\leqslant 1$ 时,$a\ln(x+1)\leqslant\ln(x+1)<x<f'(x)$,则 $f'(x)>a\ln(x+1)$; （6 分）

当 $a>1$ 时,设 $F(x)=f'(x)-a\ln(x+1)=xe^x-a\cdot\ln(x+1)$,则 $F'(x)=(x+1)e^x-\frac{a}{x+1}=(x+1)\left[e^x-\frac{a}{(x+1)^2}\right]$.

因为 $F'(0)=1-a<0$,

$F'(\sqrt{a}-1)=\sqrt{a}(e^{\sqrt{a}-1}-1)>0$,

所以存在 $x_0\in(0,\sqrt{a}-1)$,使得 $F'(x_0)=0$.

易知 $F'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上为增函数,所以当 $x\in(0,x_0)$ 时,$F'(x)<0$,$F(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上单调递减,则 $F(x)<F(0)=0$,即 $f'(x)<a\ln(x+1)$,不符合题意,

故 $a\leqslant 1$. （8 分）

设 $p(x)=a\ln(x+1)-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\ln 3-\frac{1}{x}\right)=a\ln(x+1)+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\ln 3$,$x>0$,

则 $p'(x)=\frac{a}{x+1}-\frac{1}{x^2}=\frac{ax^2-x-1}{(x+1)x^2}$.

令 $p'(x)=0$,则 $ax^2-x-1=0$,

当 $a\leqslant 0$ 时,$p(1)<0$,不符合题意,故 $0<a\leqslant 1$.

此时,方程 $ax^2-x-1=0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内只有一个实数根,记为 x_1.

当 $x\in(0,x_1)$ 时,$p'(x)<0$,$p(x)$ 单调递减;当 $x\in(x_1,+\infty)$ 时,$p'(x)>0$,$p(x)$ 单调递增,则 $p(x_1)$ 为 $p(x)$ 的最小值,

故 $p(x)\geqslant 0$ 恒成立,当且仅当 $p(x_1)=a\ln(x_1+1)+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\ln 3\geqslant 0$.

将 $a=\frac{x_1+1}{x_1^2}$ 代入 $p(x_1)$,得 $p(x_1)=\frac{(x_1+1)\ln(x_1+1)}{x_1^2}+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\ln 3$. （10 分）

设 $q(x)=\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\ln 3$,$x>0$,

则 $q'(x)=\frac{x^2[1+\ln(x+1)]-2x(x+1)\ln(x+1)}{x^4}-\frac{1}{x^2}=\frac{-(x+2)\ln(x+1)}{x^3}<0$,

所以 $q(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上为减函数. （11 分）

因为 $x_1=2$ 时,$a=\frac{3}{4}$,$q(2)=0$,所以当 $0<x\leqslant 2$ 时,$q(x)\geqslant 0$.

设 $t(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$,则 $t'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}$,

所以当 $x\in(0,2]$ 时,$t'(x)<0$,则 $t(x)$ 在区间 $(0,2]$ 上单调递减,则 $t(x)\geqslant t(2)=\frac{3}{4}$.

因为 $a=\frac{x_1+1}{x_1^2}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1^2}$,$x_1\in(0,2]$,

所以 $a\geqslant\frac{3}{4}$.

又 $0<a\leqslant 1$,所以 $\frac{3}{4}\leqslant a\leqslant 1$.

故实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{3}{4},1\right]$.　（12 分）

21. **解**:(1)由题意设圆 M 的半径为 r,则 $|MO_1|=r+\frac{1}{2}$,

$|MO_2|=\frac{7}{2}-r$,所以 $|MO_1|+|MO_2|=4>|O_1O_2|=2$,　（2 分）

故圆心 M 的轨迹是以 $O_1(-1,0)$,$O_2(1,0)$ 为焦点,4 为长轴长的椭圆,

所以 $c=1$,$a=2$,则 $b^2=3$,

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.　（4 分）

(2)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$Q(x_0,y_0)$,直线 AB 的方程为 $y=kx+t$.将 $y=kx+t$ 代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,整理得 $(3+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-12=0$,

$\Delta=(8kt)^2-4(3+4k^2)(4t^2-12)>0$,

即 $4k^2-t^2+3>0$,

则 $x_1+x_2=-\frac{8kt}{3+4k^2}$,$x_1x_2=\frac{4t^2-12}{3+4k^2}$,

所以 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\frac{\sqrt{64k^2t^2-4(3+4k^2)(4t^2-12)}}{3+4k^2}$

$=\frac{\sqrt{48(3+4k^2-t^2)}}{3+4k^2}$,

故 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{48(3+4k^2-t^2)}}{3+4k^2}$.

又原点 O 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}$,

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB|\times d$

$=\frac{\sqrt{1+k^2}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{3+4k^2-t^2}}{3+4k^2}\times\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}$

$=\frac{2\sqrt{3}\times\sqrt{(3+4k^2-t^2)t^2}}{3+4k^2}$　（6 分）

$\leqslant\frac{2\sqrt{3}\times\frac{3+4k^2-t^2+t^2}{2}}{3+4k^2}=\sqrt{3}$,

当且仅当 $3+4k^2-t^2=t^2$,即 $3+4k^2=2t^2$　（*）时,等号成立.

由 $\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$,得 $\begin{cases}x_0=\lambda x_1+\mu x_2,\\y_0=\lambda y_1+\mu y_2,\end{cases}$

代入 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$,整理得 $\lambda^2\left(\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}\right)+\mu^2\left(\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}\right)+2\lambda\mu\left(\frac{x_1x_2}{4}+\frac{y_1y_2}{3}\right)=1$,

即 $\lambda^2+\mu^2+2\lambda\mu\left(\frac{x_1x_2}{4}+\frac{y_1y_2}{3}\right)=1$　（**）.　（8 分）

而 $\frac{x_1x_2}{4}+\frac{y_1y_2}{3}=\frac{x_1x_2}{4}+\frac{(kx_1+t)(kx_2+t)}{3}$

$=\frac{(3+4k^2)x_1x_2+4kt(x_1+x_2)+4t^2}{12}$

$=\frac{(3+4k^2)\times\frac{4t^2-12}{3+4k^2}+4kt\times\left(-\frac{8kt}{3+4k^2}\right)+4t^2}{12}$

$=\frac{2t^2-(3+4k^2)}{3+4k^2}$,

由(*)可知 $\frac{x_1x_2}{4}+\frac{y_1y_2}{3}=0$,代入(**)式得 $\lambda^2+\mu^2=1$.

故 $\lambda^2+\mu^2$ 的值为 1.　（12 分）

22. **解**:(1)由 $\begin{cases}x=3+2\cos\alpha,\\y=1+2\sin\alpha\end{cases}$ 得 $(x-3)^2+(y-1)^2=4$,

所以 C 的普通方程为 $(x-3)^2+(y-1)^2=4$.　（2 分）

将 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 代入 $3\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+3=0$ 中,

得 $3x-4y+3=0$,

所以 l 的直角坐标方程为 $3x-4y+3=0$.　（4 分）

(2)由题知圆 C 的圆心 $(3,1)$,半径 $R=2$.

设点 P 到直线 l 的距离为 d,

则 $d=\frac{|3\times2-4\times0+3|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{9}{5}$.　（6 分）

设圆心 C 到直线 l 的距离为 h,

则 $h=\frac{|3\times3-4\times1+3|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{8}{5}$,　（7 分）

则 $|AB|=2\sqrt{R^2-h^2}=2\sqrt{4-\frac{64}{25}}=\frac{12}{5}$,　（9 分）

所以 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times|AB|\times d=\frac{1}{2}\times\frac{12}{5}\times\frac{9}{5}=\frac{54}{25}$.　（10 分）

23. (1)**解**:因为 $|x+m|+|x+2|\geqslant|x+m-x-2|=|m-2|$,当且仅当 $(x+m)(x+2)\leqslant0$ 时,等号成立.　（2 分）

由题得 $|m-2|\geqslant3$,解得 $m\geqslant5$ 或 $m\leqslant-1$.　（4 分）

因为 $m>0$,所以 $m\geqslant5$,所以 $M=5$.　（5 分）

(2)**证明**:由(1)知 $2a+b+c=5$,所以 $(a+b)+(a+c)=5$,　（6 分）

所以 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}=\frac{1}{5}[(a+b)+(a+c)]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)=\frac{1}{5}\left(2+\frac{a+c}{a+b}+\frac{a+b}{a+c}\right)\geqslant\frac{1}{5}\left(2+2\sqrt{\frac{a+c}{a+b}\cdot\frac{a+b}{a+c}}\right)=\frac{4}{5}$,　（9 分）

当且仅当 $\frac{a+c}{a+b}=\frac{a+b}{a+c}$,即 $b=c$ 时,等号成立,

故 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\geqslant\frac{4}{5}$.　（10 分）