2023 年普通高等学校招生全国统一考试抢分密卷(三)

理科数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在答题卡和试卷的指定位置上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

本试卷共 23 题，满分 150 分. 考试用时 120 分钟.

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集 $U=\{y|y=x^{-2}\}$，集合 $A=\{x|(\frac{1}{2})^x<\frac{1}{4}\}$，则$\complement_U A=$

A. $(0,2)$　　B. $(0,2]$　　C. $[2,+\infty)$　　D. $(-\infty,0)\cup(0,2]$

2. 已知复数 z 满足$\frac{5i}{z}=\frac{2-i}{1+i}$，则复数 z 在复平面内对应的点的坐标为

A. $(3,3)$　　B. $(-1,3)$　　C. $(-3,1)$　　D. $(-1,1)$

3. “直线 $y=(2a-1)x+1$ 经过第四象限”是“函数 $y=\sqrt{x^2+x+a}$ 的值域为$[0,+\infty)$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知 $\alpha\in(0,\pi)$，则 $\sin^2\alpha>\frac{1}{2}\sin 2\alpha$ 的概率为

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

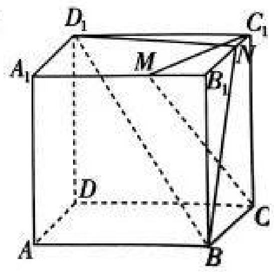
5. $(\sqrt{x}-\frac{2}{x})^{2022}$的展开式中的常数项是

A. 第 672 项　　B. 第 673 项　　C. 第 674 项　　D. 第 675 项

6. 若函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$ 的图象关于直线 $x=\frac{3\pi}{4}$对称，且在$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$上单调递减，则 φ 的值可能为

A. 2π　　B. $\frac{3\pi}{2}$　　C. π　　D. $\frac{\pi}{2}$

7. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M,N 分别在线段 A_1B_1,B_1C_1 上(均不与端点重合)，则以下结论正确的是



A. 不存在点 M,N，使得平面 $CMC_1\perp$平面 BND_1

B. 存在唯一一对点 M,N，使得平面 $CMC_1\perp$平面 BND_1

C. 仅有两对点 M,N，使得平面 $CMC_1\perp$平面 BND_1

D. 存在无数对点 M,N，使得平面 $CMC_1\perp$平面 BND_1

8. 已知等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,若$\{a_n\}$,$\{(-1)^n a_n\}$,$\{a_{2n-1}\}$的前 2 023 项的和分别为 A,B,C,且 $A=4$,$C=6$,则 $B=$

A. $\frac{3}{4}$　　B. -3　　C. 3　　D. $-\frac{3}{4}$

9. 已知 O 为坐标原点,点 P,Q 是抛物线 $C:y^2=8x$ 上的不同两点,F 为 C 的焦点,G 为线段 QF 的中点,若 $PQ\perp PF$,$PF\perp OG$,则点 P,Q 到 y 轴的距离之积为

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

10. 若对任意的 $x\in[2,+\infty)$,$\sqrt{x^3}-\sqrt{x^3-2x^2}<x^2-ax+4$ 恒成立,则 a 的取值范围是

A. $(-\infty,4-\sqrt{2})$　　B. $(4-\sqrt{2},+\infty)$

C. $(-\infty,4)$　　D. $(4,+\infty)$

11. 将 4 个半径均为 1 的半球放到一个圆柱形封闭容器内(忽略容器厚度),若这 4 个半球两两相切,且其中 3 个半球的底面都在圆柱形容器的下底面上,则圆柱形容器表面积的最小值为

A. $\frac{2\pi(7+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6})}{3}$　　B. $\frac{2\pi(7+4\sqrt{2}+8\sqrt{3})}{3}$

C. $\frac{4\pi(6+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\sqrt{6})}{3}$　　D. $\frac{2\pi(3+6\sqrt{2}+3\sqrt{3}+2\sqrt{6})}{3}$

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x-\frac{1}{x},x<0\\(x-4n-2)^2,x\in[4n,4n+4),n\in\mathbf{N},且\ n\leqslant 4\end{cases}$,若方程 $f(x)=a$ 有 12 个实数根,且这 12 个根从小到大排列依次为 $x_1,x_2,\cdots,x_{12}$,则 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+x_3+x_4+\cdots+x_{12}$ 的取值范围是

A. $(2,44)$　　B. $(-\infty,54)$　　C. $(62,96)$　　D. $(96,98)$

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 若曲线 $f(x)=e^x-x$ 在 $x=t$ 处的切线过坐标原点,则 $t=$______.

14. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,4)$,$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影为 $-2|\boldsymbol{a}|$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$______.

15. 已知在数列$\{a_n\}$中,$a_2=2$,$a_{st}=a_s+a_t(s,t\in\mathbf{N}^*)$,$a_{2^1}+a_{2^2}+\cdots+a_{2^k}=72$,则 $k=$______.

16. 已知 F_1,F_2 分别为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点,A 是 C 的右顶点,P 是 C 的右支上与 A 不重合的一点,$\sin\angle PF_2F_1=5\sin\angle PF_1F_2$,点 Q 与点 P 关于坐标原点对称,则直线 AP,AQ 斜率之积的取值范围是______.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17 ~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17. (12 分)

已知$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,$\tan^2\frac{A}{2}=\frac{c-b}{c+b}$.

(1)求证:$\triangle ABC$ 是直角三角形;

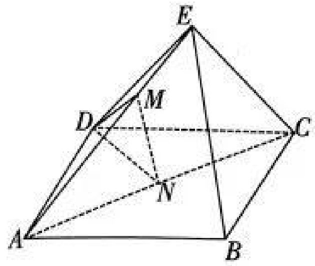
(2)若 $a=\sqrt{3}$,$c=2$,点 M,N 均在边 AB 上,且 $AM<AN$,$MN=1$,$\frac{CN}{\sin\angle CMN}=\frac{5}{3}$,求 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}$ 的值.

18. (12 分)

如图,在四棱锥 $E-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形,$\triangle CDE$ 是等腰直角三角形,平面 $CDE\perp$ 平面 $ABCD$,$CE=DE$,$DM\perp AE$,$\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{NC}(\lambda>0)$.

(1)若 $\lambda=2$,平面 $DMN\cap$ 平面 $CDE=l$,证明:$MN/\!/l$;

(2)当 $\lambda=1$ 时,求直线 MN 与平面 BCE 所成角的正弦值.



19. (12 分)

跑腿服务是随即时物流发展出现的非标准化服务,省时省力是消费者使用跑腿服务的主要目的,随着消费者即时需求和节约时间需求的提升,跑腿经济的发展空间有望逐步扩大. 某跑腿服务公司随机统计了 800 名不同年龄消费者每月的跑腿服务使用频率,得到如下频数分布表:

使用频率 \ 年龄/岁	[15,25)	[25,35)	[35,45)	[45,55]
每月 1 次	50	40	40	90
每月 2～4 次	80	80	100	60
每月 5～10 次	60	75	56	47
每月 10 次以上	10	5	4	3

(1)若把年龄在[15,35)内的人称为青年,年龄在[35,55]内的人称为中年,每月使用跑腿服务低于 5 次的为使用频率低,不低于 5 次的为使用频率高,补全下面的 2×2 列联表,并判断是否有 99% 的把握认为跑腿服务的使用频率高低与年龄有关?

	青年	中年	合计
使用频率高			
使用频率低			
合计			

(2)从样本中每月使用跑腿服务 2～4 次的消费者中按照年龄段利用分层抽样的方法抽取 16 人,再从这 16 人中随机抽取 3 人,记这 3 人中年龄在[35,45)与[45,55]内的人数分别为 X,Y,若 $\xi=|X-Y|$,求 ξ 的分布列与数学期望.

参考公式:$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中 $n=a+b+c+d$.

附:

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.050	0.010	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

20. (12 分)

已知 O 为坐标原点,椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上顶点为 A,左焦点为 F,P 为第二象限内一点,且 OP 垂直平分线段 FA,$\triangle PAF$ 为正三角形,$|OP|=1+\sqrt{3}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程.

(2)若斜率存在的直线与 C 交于 D,E 两点(均不与 A 重合),直线 AD,AE 分别与 x 轴交于点 M,N,记线段 MN 的中点为 Q,$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=-\sqrt{2}\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{OQ}$,判断直线 DE 是否过定点?若过定点,求出该定点的坐标;若不过定点,请说明理由.

21. (12 分)

已知函数 $f(x)=\frac{a-1-x}{e^x}+a\ln x-x+1,a\in\mathbf{R}$.

(1)若函数 $f(x)$ 存在极值,求 a 的取值范围;

(2)若 $a=1$,讨论函数 $g(x)=x(e^x-\frac{1}{e^x}-3)-f(x)$ 的零点个数.

(二)选考题:共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做,则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4:坐标系与参数方程](10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=3-t^2\\y=2t^2+a\end{cases}$ ($a\in\mathbf{R}$,t 为参数). 以坐标原点为极点,x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$.

(1)求曲线 C_1 的普通方程与曲线 C_2 的直角坐标方程;

(2)若曲线 C_1 与曲线 C_2 只有一个公共点,求 a 的值.

23. [选修 4-5:不等式选讲](10 分)

已知 $a^2+b^2=3$,$(a+1)(b+1)$ 的最小值为 M.

(1)求 M 的值;

(2)求不等式 $x^2+|x-1|>|x-M|$ 的解集.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。