湘豫名校联考
2023年3月高三第一次模拟考试
数学(文科)参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	D	C	A	D	C	B	B	A	D	A

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.D 【命题意图】本题考查集合的运算及解不等式，考查了数学运算的核心素养.

【解析】因为集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|x^2-2x-3\leqslant 0\}=\{x\in\mathbf{R}|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}||x-2|<1\}=\{x\in\mathbf{R}|1<x<3\}$，所以 $A\cap B=\{x\in\mathbf{R}|1<x<3\}=(1,3)$.故选D.

2.B 【命题意图】本题考查复数的运算和复数模的求解，考查了运算求解能力和数学运算的核心素养.

【解析】因为 $z=\dfrac{5}{1-2\mathrm{i}}=\dfrac{5(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}=1+2\mathrm{i}$，所以 $|z-\mathrm{i}|=|1+\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.故选B.

3.D 【命题意图】本题考查程序框图及函数计算，考查了数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】由程序框图可知，该程序是运算分段函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, x>1,\\ x+1, x\leqslant 1\end{cases}$ 的值.因为输出的函数值 $f(x)=\dfrac{1}{2}$，所以当 $x>1$ 时，由 $\log_2 x=\dfrac{1}{2}$，解得 $x=\sqrt{2}$；当 $x\leqslant 1$ 时，由 $x+1=\dfrac{1}{2}$，解得 $x=-\dfrac{1}{2}$.故选D.

4.C 【命题意图】本题考查函数的周期性及函数的对称性，考查了数学抽象、逻辑推理的核心素养.

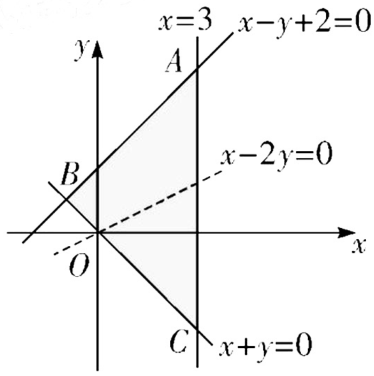
【解析】由 $f(2+x)+f(2-x)=0$，得 $f(4+x)=-f(-x)$①.又函数 $f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，即 $f(x)=f(-x)$②.联立①②两式，可得 $f(4+x)=-f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x+8)=f(x)$.所以函数 $f(x)$ 的一个周期为8.所以 $f(2\,023)=f(253\times 8-1)=f(-1)=f(1)=1$.故选C.

5.A 【命题意图】本题考查独立性检验，考查了数学运算、逻辑推理、数据分析的核心素养.

【解析】因为 K^2 的观测值 $k=\dfrac{100\times(20\times 15-35\times 30)^2}{55\times 45\times 50\times 50}=\dfrac{100}{11}\approx 9.091>7.879$，由临界值表知，有99.5%的把握认为"竞赛成绩是否优秀与性别有关".故选A.

6.D 【命题意图】本题考查线性规划，考查了直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】由题，画出满足题意的可行域如图所示，令 $z=x-2y$，$z=x-2y$ 可化为 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}z$，$-\dfrac{1}{2}z$ 相当于直线 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}z$ 在 y 轴上的截距.平移直线 $y=\dfrac{1}{2}x$，当直线过点 A 时，截距最大，z 最小；当直线过点 C 时，截距最小，z 最大.联立 $\begin{cases}x-y+2=0,\\ x=3,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=3,\\ y=5,\end{cases}$ 所以 $A(3,5)$.联立 $\begin{cases}x+y=0,\\ x=3,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=3,\\ y=-3,\end{cases}$ 所以 $C(3,-3)$.所以 $z_{\min}=3-2\times 5=-7$，$z_{\max}=3-2\times(-3)=9$.所以 $|x-2y|_{\max}=|z|_{\max}=9$.故选D.



7.C 【命题意图】本题考查三角函数的图象与性质，考查了直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】因为 $\omega>0$，所以当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，有 $\dfrac{\pi}{6}<\omega x+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2}\omega+\dfrac{\pi}{6}$.因为 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的极值点有

且仅有 2 个，结合函数图象得 $\frac{3\pi}{2}<\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{2}$，解得 $\frac{8}{3}<\omega\leqslant\frac{14}{3}$，所以 ω 的取值范围为 $\left(\frac{8}{3},\frac{14}{3}\right]$. 故选 C.

8. B 【命题意图】本题考查线性回归分析，考查了数学运算、逻辑推理、数据分析的核心素养.

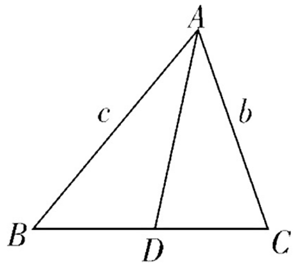
【解析】由题中的数据可知 $x=4$，$y=154$，所以 $\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{7}x_iy_i-7xy}{\sum\limits_{i=1}^{7}x_i^2-7x^2}=\frac{4\ 508-7\times4\times154}{140-7\times16}=\frac{196}{28}=7$. 所以 $\hat{a}=y-\hat{b}x=154-7\times4=126$. 所以 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}=7x+126$. 故选 B.

9. B 【命题意图】本题考查函数的值域，考查了逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】方法一：函数 $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}=1-\frac{2}{1+e^x}$，因为 $e^x>0$，所以 $1+e^x>1$，所以 $0<\frac{1}{1+e^x}<1$. 所以 $-2<-\frac{2}{1+e^x}<0$. 所以 $-1<1-\frac{2}{1+e^x}<1$，即 $-1<f(x)<1$. 当 $-1<f(x)<0$ 时，$[f(x)]=-1$；当 $0\leqslant f(x)<1$ 时，$[f(x)]=0$. 故 $[f(x)]$ 的值域为 $\{-1,0\}$. 故选 B.

方法二：由 $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$，得 $e^x=\frac{f(x)+1}{1-f(x)}$. 因为 $e^x>0$，所以 $-1<f(x)<1$. 当 $-1<f(x)<0$ 时，$[f(x)]=-1$；当 $0\leqslant f(x)<1$ 时，$[f(x)]=0$. 所以 $[f(x)]$ 的值域为 $\{-1,0\}$. 故选 B.

10. A 【命题意图】本题考查解三角形、平面向量的相关运算，考查了数学运算、逻辑推理的核心素养.



【解析】方法一：如图，设 $AD=x$，$\angle ADB=\theta$，则 $\angle ADC=\pi-\theta$. 在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $c^2=4+x^2-4x\cos\theta$①. 在 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理得 $b^2=4+x^2-4x\cos(\pi-\theta)=4+x^2+4x\cos\theta$②. 由①+②可得：$b^2+c^2=8+2x^2$. 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $16=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}=b^2+c^2-bc\geqslant b^2+c^2-\frac{b^2+c^2}{2}=\frac{1}{2}(b^2+c^2)=4+x^2$，当且仅当 $b=c=4$ 时等号成立，解得 $x\leqslant2\sqrt{3}$，即 AD 的最大值为 $2\sqrt{3}$. 故选 A.

方法二：由题可得，$\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|$，所以 $|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2=16+|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|$①. 又因为 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，所以 $4|\overrightarrow{AD}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|$②，由①②得 $4|\overrightarrow{AD}|^2=16+2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|$，由①得 $|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2=16+|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\geqslant2|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|$，则 $|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\leqslant16$，所以 $4|\overrightarrow{AD}|^2\leqslant16+2\times16=48$，当且仅当 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=4$ 时，等号成立. 所以 $|\overrightarrow{AD}|\leqslant2\sqrt{3}$. 故选 A.

11. D 【命题意图】本题考查直线与椭圆的位置关系，考查了直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】方法一：设直线 l 的方程为 $y=kx+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}y=kx+1,\\x^2+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 整理可得：$(2+k^2)x^2+2kx-1=0$，则 $x_1+x_2=\frac{-2k}{2+k^2}$，$x_1x_2=\frac{-1}{2+k^2}$. 由题设知，$OA$ 所在的直线方程为 $y=\frac{y_1}{x_1}x$. 因为直线 OA 与直线 $y=2$ 相交于点 M，所以 $M\left(\frac{2x_1}{y_1},2\right)$；同理可得 $N\left(\frac{2x_2}{y_2},2\right)$. 所以 $\overrightarrow{OM}=\left(\frac{2x_1}{y_1},2\right)$，$\overrightarrow{ON}=\left(\frac{2x_2}{y_2},2\right)$. 因为 $\angle MON$ 为锐角，所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}>0$，所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\frac{4x_1x_2}{y_1y_2}+4=\frac{4x_1x_2}{(kx_1+1)(kx_2+1)}+4=\frac{4x_1x_2}{k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1}+4=\frac{4\times\frac{-1}{2+k^2}}{k^2\times\frac{-1}{2+k^2}+k\times\frac{-2k}{2+k^2}+1}+4=\frac{2}{k^2-1}+4=\frac{4k^2-2}{k^2-1}$，则 $\frac{4k^2-2}{k^2-1}>0$，解得：$k^2<\frac{1}{2}$ 或 $k^2>1$，所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<k<\frac{\sqrt{2}}{2}$，或 $k>1$，或 $k<-1$. 故直线 l 的斜率 k 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup(1,+\infty)$. 故选 D.

方法二：当 $k>1$ 时，A,B 分别在第一、第三象限(或第三、第一象限)，由数形结合得 $\angle AOB+\angle MON=\pi$. 易得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<0$，所以 $\angle MON$ 为锐角. 同理当 $k<-1$ 时满足条件. 检验 $k=0$ 时，$\angle AOB=\angle MON$，所以 $\angle MON$ 为锐角. 排除法可得 D.

12. A 【命题意图】本题考查导数的应用，考查了数学抽象、逻辑推理、数学运算、直观想象的核心素养.

【解析】方法一：比较 a,b 的大小时，(法一)设函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}$. 当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减. 所以当 $x=\mathrm{e}$ 时，函数取得最大值 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，因为 $a=\ln\sqrt{2}=\dfrac{\ln 2}{2}=f(2)$，$b=\dfrac{1}{\mathrm{e}}=\dfrac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}=f(\mathrm{e})$，$\mathrm{e}>2$，所以 $f(2)<f(\mathrm{e})$，即 $a<b$.

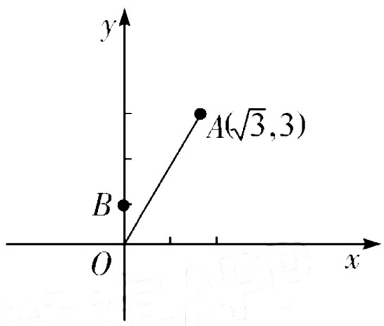
(法二)因为 $a=\dfrac{\ln 2}{2}$，$b=\dfrac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}$，设 $A(2,\ln 2)$，$B(\mathrm{e},\ln \mathrm{e})$，$O$ 为坐标原点，结合函数 $y=\ln x$ 的图象知 $k_{OA}<k_{OB}$，所以 $a<b$.

比较 b,c 的大小时，设函数 $g(x)=x-\ln x-1$，$x>0$，则 $g'(x)=\dfrac{x-1}{x}$. 当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，所以函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，所以函数 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 因为 $b=g\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$，$c=g\left(\dfrac{1}{3}\right)$，又 $0<\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{\mathrm{e}}<1$，所以 $g\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)<g\left(\dfrac{1}{3}\right)$，即 $b<c$. 综上可得，$a<b<c$，故选 A.

方法二(估值法)：因为 $a=\ln\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\ln 2\approx\dfrac{0.69}{2}=0.345$，$b=\dfrac{1}{\mathrm{e}}\approx\dfrac{1}{2.7}\approx0.37$，$c=\ln 3-\dfrac{2}{3}\approx1.1-0.67=0.43$. 所以 $a<b<c$. 故选 A.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

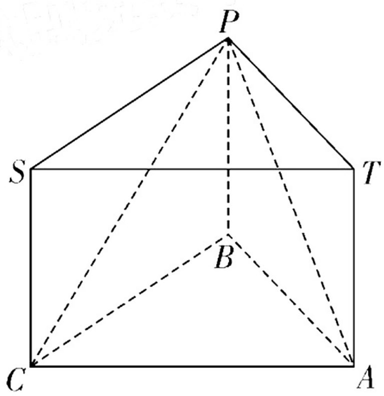
13. $\frac{\pi}{6}$ 【命题意图】本题考查向量的运算，考查了数学运算的核心素养.



【解析】方法一：因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},3)$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\dfrac{3}{1\times2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 因为 $0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$，所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{6}$.

方法二(几何法)：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},3)$，设 $A(\sqrt{3},3)$，$B(0,1)$，O 为原点，结合图象，可得 $\overrightarrow{OA}=(\sqrt{3},3)$，$\overrightarrow{OB}=(0,1)$，所以 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{6}$.

14. 60π 【命题意图】本题考查线面垂直以及三棱锥的外接球问题，考查了直观想象和数学运算的核心素养.



【解析】由题意，将三棱锥 $P-ABC$ 补成直三棱柱 $TPS-ABC$，则该直三棱柱的外接球即为三棱锥 $P-ABC$ 的外接球，且直三棱柱的外接球球心落在上、下底面外接圆圆心连线的中点上. 设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 r，三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径为 R，因为 $PB\perp$ 平面 ABC，$PB=2\sqrt{3}$，$AC=6$，$\angle ABC=120^\circ$，由正弦定理得，$2r=\dfrac{6}{\sin 120^\circ}=4\sqrt{3}$，所以 $r=2\sqrt{3}$，$R^2=r^2+\left(\dfrac{PB}{2}\right)^2=12+3=15$. 所以三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=60\pi$.

15. 1 【命题意图】本题考查双曲线与圆的综合应用，考查了直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】由题意得 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，所以 $5a^2=4c^2=4(a^2+b^2)$，所以 $a^2=4b^2$. 因为点 $(4,\sqrt{3})$ 在 C 上，所以 $\dfrac{16}{a^2}-$

$\frac{3}{b^2}=1$,所以 $\frac{4}{b^2}-\frac{3}{b^2}=1$,解得 $b^2=1$.所以 $a^2=4,c^2=5$,所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$.由 $\begin{cases}x^2+y^2=5,\\ \frac{x^2}{4}-y^2=1,\end{cases}$ 解得 $|y|=\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times 2c\times\frac{\sqrt{5}}{5}=1$.

16.1 000 【命题意图】本题考查函数的应用,考查了数学建模、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】由题意得,销售收入为 $100x$ 万元,当产量不足 50 万件时,利润 $f(x)=100x-p(x)-200=-\frac{1}{120}x^3+40x-200$;当产量不小于 50 万件时,利润 $f(x)=100x-p(x)-200=1\ 160-\left(x+\frac{6\ 400}{x}\right)$.所以利润 $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{120}x^3+40x-200,0<x<50,\\ 1\ 160-\left(x+\frac{6\ 400}{x}\right),x\geqslant 50.\end{cases}$ 因为当 $0<x<50$ 时,$f'(x)=-\frac{1}{40}(x+40)(x-40)$,所以 $f(x)$ 在 $(0,40)$ 上单调递增,在 $(40,50)$ 上单调递减,则 $f(x)\leqslant f(40)=\frac{2\ 600}{3}$;当 $x\geqslant 50$ 时,由 $1\ 160-\left(x+\frac{6\ 400}{x}\right)\leqslant 1\ 160-2\sqrt{x\times\frac{6\ 400}{x}}=1\ 000$,当且仅当 $x=80$ 时取等号.又 $1\ 000>\frac{2\ 600}{3}$,故当 $x=80$ 时,所获利润最大,最大值为1 000万元.

三、解答题:共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17～21 题为必考题,每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17.【命题意图】本题考查统计与概率,考查了逻辑推理、数学运算、数据分析的核心素养.

【解析】(1)因为 $(0.010+0.030)\times 10=0.4<0.5$,$0.4+0.045\times 10=0.85>0.5$,

所以竞赛成绩的中位数在[70,80)内. …… 3 分

设竞赛成绩的中位数为 m,则 $(m-70)\times 0.045+0.4=0.5$,解得 $m\approx 72$.

所以估计这 100 名学生的竞赛成绩的中位数为 72. …… 5 分

(2)由频率分布直方图可知,竞赛成绩在[80,90)和[90,100]内的频率分别是 0.1 和 0.05,

则采用分层抽样的方法抽取的 6 人中,竞赛成绩在[80,90)内的有 4 人,记为 a,b,c,d,

竞赛成绩在[90,100]内的有 2 人,记为 e,f. …… 8 分

从这 6 人中随机抽取 2 人的情况有:$ab,ac,ad,ae,af,bc,bd,be,bf,cd,ce,cf,de,df,ef$,共 15 种. … 10 分

其中符合条件的情况有 ae,af,be,bf,ce,cf,de,df,共 8 种. …… 11 分

故所求概率 $P=\frac{8}{15}$. …… 12 分

18.【命题意图】本题考查数列的通项、数列求和,考查了逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)因为 $3S_n=2a_n-n+2(n\in\mathbf{N}^*)$①,

当 $n=1$ 时,$3a_1=2a_1-1+2$,得 $a_1=1$. …… 1 分

当 $n\geqslant 2$ 时,$3S_{n-1}=2a_{n-1}-(n-1)+2$②,

①-②得:$3a_n=2a_n-2a_{n-1}-1$,即 $a_n=-2a_{n-1}-1$,

所以 $a_n+\frac{1}{3}=(-2)\times\left(a_{n-1}+\frac{1}{3}\right)$. …… 3 分

所以数列 $\left\{a_n+\frac{1}{3}\right\}$ 是首项为 $a_1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$,公比为 -2 的等比数列.

所以 $a_n+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\times(-2)^{n-1}=\frac{1}{3}\times(-2)^{n+1}$.

所以 $a_n=\frac{1}{3}\times(-2)^{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}[(-2)^{n+1}-1](n\in\mathbf{N}^*)$. …………………………………………… 5 分

(2)由(1)知,$n\cdot(3a_n+1)=n\cdot(-2)^{n+1}$,

令 $b_n=n\cdot(3a_n+1)=n\cdot(-2)^{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$, …………………………………………………… 6 分

则 $T_n=1\times(-2)^2+2\times(-2)^3+3\times(-2)^4+\cdots+n\times(-2)^{n+1}$③.

所以 $-2T_n=(-2)^3+2\times(-2)^4+3\times(-2)^5+\cdots+(n-1)\times(-2)^{n+1}+n\times(-2)^{n+2}$④. ………… 7 分

③－④得:$3T_n=(-2)^2+(-2)^3+(-2)^4+\cdots+(-2)^{n+1}-n\times(-2)^{n+2}$, …………………………… 8 分

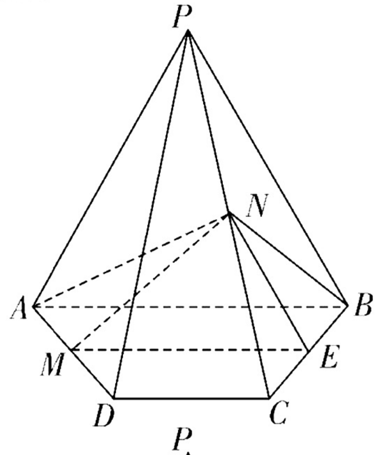
整理得:$3T_n=\frac{(-2)^2\times[1-(-2)^n]}{1-(-2)}-n\times(-2)^{n+2}$

$=\frac{4\times[1-(-2)^n]}{3}-n\times(-2)^{n+2}$, ………………………………………………………………… 11 分

所以 $T_n=\frac{4}{9}[1-(-2)^n]-\frac{n}{3}\times(-2)^{n+2}=\frac{4}{9}-\left(\frac{1}{9}+\frac{n}{3}\right)(-2)^{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$. ……………………… 12 分

19.**【命题意图】**本题考查空间线面位置关系、空间几何体的体积,考查了直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)证明:取 BC 的中点 E,连接 EM,EN.



因为底面 $ABCD$ 是等腰梯形,$AB/\!/CD$,

又 M,E 分别是 AD,BC 的中点,所以 $EM/\!/AB$.

又因为 $EM\not\subset$平面 PAB,$AB\subset$平面 PAB,所以 $EM/\!/$平面 PAB. …… 2 分

因为 N 是 PC 的中点,所以 $EN/\!/PB$.

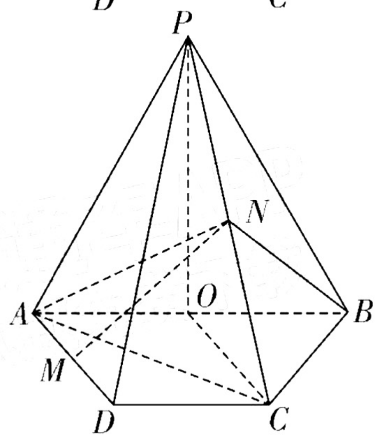
又因为 $EN\not\subset$平面 PAB,$PB\subset$平面 PAB,所以 $EN/\!/$平面 PAB.

因为 $EM\subset$平面 MNE,$EN\subset$平面 MNE,$EM\cap EN=E$,

所以平面 $MNE/\!/$平面 PAB. …………………………………………………… 4 分

因为 $MN\subset$平面 MNE,所以 $MN/\!/$平面 PAB. …………………………… 5 分

(2)如图,取 AB 的中点 O,连接 PO,CO.



由已知得 $OA/\!/CD$ 且 $OA=CD$,所以四边形 $OADC$ 是平行四边形.

所以 $OC/\!/AD$,且 $OC=AD$. …………………………………………………… 6 分

因为△PAB 是正三角形,所以 $PO\perp AB$,

因为平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$,平面 $PAB\cap$平面 $ABCD=AB$,

所以 $PO\perp$平面 $ABCD$,又 $OC\subset$平面 $ABCD$,所以 $PO\perp OC$. ………… 7 分

设 $AB=2CD=2AD=2BC=2a$,则 $PO=\sqrt{3}a$.

在 Rt△POC 中,由 $PO^2+OC^2=PC^2$,即 $(\sqrt{3}a)^2+a^2=4^2$,解得 $a=2$,

………………………………………………………………………………… 9 分

即 $AB=2CD=2AD=2BC=4$.

方法一:由题意可得$\angle BAD=60^\circ$,点 M 到 AB 的距离 $h=AM\sin 60^\circ=\frac{1}{2}AD\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

即点 M 到平面 PAB 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………………………… 11 分

又 $MN/\!/$平面 PAB,所以点 N 到平面 PAB 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $V_{N-PAB}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle PAB}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2$. ………………………………… 12 分

方法二:连接 AC,由题意得,$\angle ABC=60^\circ$,所以点 C 到 AB 的距离为 $d=BC\sin 60^\circ=\sqrt{3}$.

因为 N 为 CP 的中点,所以三棱锥 $N-PAB$ 的高为三棱锥 $C-PAB$ 高的$\frac{1}{2}$,所以 $V_{N-PAB}=\frac{1}{2}V_{C-PAB}=$

$\frac{1}{2}V_{P-ABC}$. …………………………………………………………………………………………… 11 分

所以 $V_{N-PAB}=\frac{1}{2}V_{P-ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}\times OP=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=2$. ……………… 12 分

20.【命题意图】本题考查抛物线、导数的几何意义、直线与抛物线，考查了直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)因为 $p>0$，由题意可得 $m+\frac{p}{2}=2,(-2)^2=2pm$， …………………………………… 2 分

解得 $m=1,p=2$，所以抛物线 C 的标准方程为 $x^2=4y$. …………………………………………… 3 分

(2)方法一：设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，由 $y=\frac{1}{4}x^2$，得 $y'=\frac{1}{2}x$， …………………………………… 4 分

所以抛物线在点 M 处的切线方程为 $y-y_1=\frac{1}{2}x_1(x-x_1)$，

在点 N 处的切线方程为 $y-y_2=\frac{1}{2}x_2(x-x_2)$. ………………………………………………… 5 分

因为两条切线均过点 $A(-1,-2)$，所以 $\begin{cases}2+y_1=\frac{1}{2}x_1(x_1+1),\\2+y_2=\frac{1}{2}x_2(x_2+1),\end{cases}$

所以点 M,N 的坐标均满足 $2+y=\frac{1}{2}x(x+1)$， ………………………………………………… 6 分

所以 $2+\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$，即 $x^2+2x-8=0$，解得 $x=-4$，或 $x=2$.

不妨设 $x_1=-4,x_2=2$，则 $M(-4,4),N(2,1)$.

易知 $F(0,1)$，所以 $\overrightarrow{FM}=(-4,3),\overrightarrow{FA}=(-1,-3),\overrightarrow{FN}=(2,0)$. ……………………………… 8 分

所以 $\cos\langle\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FM}\rangle=\frac{\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FM}}{|\overrightarrow{FA}||\overrightarrow{FM}|}=\frac{4-9}{5\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$, ……………………………………………… 9 分

$\cos\langle\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FN}\rangle=\frac{\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FN}}{|\overrightarrow{FA}||\overrightarrow{FN}|}=\frac{-2}{2\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$. ………………………………………………… 10 分

所以 $\angle MFA=\angle NFA$，所以 $\angle MFQ=\angle NFQ$，所以 FQ 平分 $\angle MFN$.

所以点 Q 到直线 FM 的距离 d_1 等于点 Q 到直线 FN 的距离 d_2， ………………………………… 11 分

所以 $\frac{d_1}{d_2}=1$，为定值，得证. …………………………………………………………………… 12 分

方法二：设切点为 (x_0,y_0)，由 $y=\frac{1}{4}x^2$，得 $y'=\frac{1}{2}x$， ……………………………………………… 4 分

所以过点 $A(-1,-2)$ 的抛物线的切线方程为 $y+2=\frac{1}{2}x_0(x+1)$.

联立方程 $\begin{cases}y=\frac{1}{4}x^2,\\y+2=\frac{1}{2}x_0(x+1),\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $x^2-2x_0x+8-2x_0=0$， ………………………… 5 分

则 $\Delta=4x_0^2-4(8-2x_0)=0$，解得 $x_0=-4$，或 $x_0=2$. ……………………………………………… 6 分

不妨设 $x_M=-4,x_N=2$，则 $M(-4,4),N(2,1)$，

所以直线 MN 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x+2$. …………………………………………………………… 7 分

易知 $F(0,1)$，所以直线 AF 的方程为 $y=3x+1$.

由$\begin{cases}y=3x+1,\\ y=-\dfrac{1}{2}x+2,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\dfrac{2}{7},\\ y=\dfrac{13}{7},\end{cases}$即 $Q\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{13}{7}\right)$. ………………………………………………………… 8 分

易得直线 FM 的方程为 $y=-\dfrac{3}{4}x+1$，直线 FN 的方程为 $y=1$，

所以点 Q 到直线 FM 的距离 $d_1=\dfrac{\left|\dfrac{2}{7}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{13}{7}-1\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+1^2}}=\dfrac{6}{7}$，………………………………………… 10 分

点 Q 到直线 FN 的距离 $d_2=\dfrac{13}{7}-1=\dfrac{6}{7}$. ……………………………………………………… 11 分

所以 $d_1=d_2$，则 $\dfrac{d_1}{d_2}=1$，为定值，得证. ………………………………………………………… 12 分

21.**【命题意图】**本题考查导数及其应用，考查了逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)当 $a=3,b=-5$ 时，$f(x)=\ln x-3x^2+5x,x>0$.

则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-6x+5=\dfrac{-6x^2+5x+1}{x}=-\dfrac{6x^2-5x-1}{x}=-\dfrac{(6x+1)(x-1)}{x}$. ………………………… 2 分

当 $f'(x)>0$ 时，解得 $-\dfrac{1}{6}<x<1$，又 $x>0$，所以 $0<x<1$；

当 $f'(x)<0$ 时，解得 $x>1$，或 $x<-\dfrac{1}{6}$，又 $x>0$，所以 $x>1$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，单调递减区间为 $(1,+\infty)$. …………………………………… 4 分

(2)函数 $g(x)=f(x)+ax^2=\ln x-bx,x>0$，

令 $g(x)=\ln x-bx=0$，得 $b=\dfrac{\ln x}{x}$.

令 $\varphi(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$，则直线 $y=b$ 与函数 $\varphi(x)$ 的图象在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的交点. …………… 5 分

因为 $\varphi'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2},x>0$，由 $\varphi'(x)>0$，得 $0<x<\mathrm{e}$；由 $\varphi'(x)<0$，得 $x>\mathrm{e}$.

所以函数 $\varphi(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减.

所以 $\varphi(x)_{\max}=\varphi(x)_{极大值}=\varphi(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. ……………………………………………………………… 6 分

又 $\varphi(1)=0$，且当 $x\to+\infty$ 时，$\varphi(x)\to0$ 且 $\varphi(x)>0$，

由于 x_1,x_2 是方程 $g(x)=0$ 的两实根，所以 $0<b<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. ……………………………………………… 7 分

方法一：不妨设 $1<x_2<\mathrm{e}<x_1$，由 $g(x_1)=g(x_2)=0$，

得 $\ln x_1-bx_1=0,\ln x_2-bx_2=0$，

两式相减得：$\ln x_1-\ln x_2=b(x_1-x_2)$，

两式相加得：$\ln x_1+\ln x_2=b(x_1+x_2)$. ………………………………………………………………… 8 分

欲证：$\ln x_1+\ln x_2>2$，只需证：$b(x_1+x_2)>2$，

即证：$\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\dfrac{2}{x_1+x_2}$，即证：$\ln\dfrac{x_1}{x_2}>\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}$. …………………………………………… 9 分

设 $t=\dfrac{x_1}{x_2}>1$，则 $x_1=tx_2$，代入上式得：$\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1},t>1$.

故只需证：$\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1},t>1$. ……………………………………………………………………… 10 分

设 $h(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1},t>1$，则 $h'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{2(t+1)-2(t-1)}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

所以 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(t)>h(1)=0$，所以 $\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}$. ………………………………………………………… 11 分

故 $\ln x_1+\ln x_2>2$，得证. ………………………………………………………………………………… 12 分

方法二(换元法+构造差函数)：不妨设 $1<x_1<\mathrm{e}<x_2$，令 $t_1=\ln x_1$，$t_2=\ln x_2$，

则 $0<t_1<1<t_2$，$\dfrac{t_1}{\mathrm{e}^{t_1}}=\dfrac{t_2}{\mathrm{e}^{t_2}}$，即证 $t_1+t_2>2$.

设 $k(t)=\dfrac{t}{\mathrm{e}^t}$，则 $k(t_1)=k(t_2)$.

因为 $k'(t)=\dfrac{1-t}{\mathrm{e}^t}$，所以 $k(t)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减. ………………………… 8 分

当 $t_2\geqslant 2$ 时，易得 $t_1+t_2>2$；

当 $0<t_1<1<t_2<2$ 时，要证 $t_1+t_2>2$，即证 $1>t_1>2-t_2>0$，即证 $k(t_1)>k(2-t_2)$.

因为 $k(t_1)=k(t_2)$，所以 $k(t_2)>k(2-t_2)$.

构造函数 $K(t)=k(t)-k(2-t)(1<t<2)$，易得 $K(1)=0$，$K'(t)=k'(t)+k'(2-t)$.

则 $K'(t)=\dfrac{1-t}{\mathrm{e}^t}+\dfrac{t-1}{\mathrm{e}^{2-t}}=(1-t)(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{t-2})(1<t<2)$，所以 $1-t<0$. ……………………………………… 10 分

又 $-t<t-2$，所以 $\mathrm{e}^{-t}<\mathrm{e}^{t-2}$，即 $K'(t)>0$.

所以 $K(t)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，$K(t)>0(1<t<2)$.

所以 $K(t_2)>0$，即 $k(t_2)>k(2-t_2)$.

故 $\ln x_1+\ln x_2>2$，得证. ………………………………………………………………………………… 12 分

(注：方法二涉及复合函数求导，文科生不做要求，若答对也可得分)

(二)选考题：共 10 分. 请考生在 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.【命题意图】本题考查直线的极坐标方程与直角坐标方程互化，圆的参数方程与极坐标方程互化，考查了直观想象和数学运算的核心素养.

【解析】(1)因为曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+\cos\theta,\\ y=-2+\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数)，

所以曲线 C 的普通方程为 $(x+2)^2+(y+2)^2=1$，整理得 $x^2+y^2+4x+4y+7=0$.

因为 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\\ x^2+y^2=\rho^2,\end{cases}$ 所以曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2+4\rho(\sin\theta+\cos\theta)+7=0$. ……………… 3 分

因为直线 l 的极坐标方程为 $\rho(\cos\theta+\sin\theta)=-1$，

所以 $x+y=-1$，即直线 l 的直角坐标方程为 $x+y+1=0$. …………………………………………… 5 分

(2)因为直线 l：$x+y+1=0$，所以直线 l 与 y 轴交于点 $A(0,-1)$.

因为曲线 C 的方程为 $(x+2)^2+(y+2)^2=1$，所以曲线 C 表示圆心为 $(-2,-2)$，半径为 1 的圆.

设直线 AP 的斜率为 k，点 $P(x,y)$，则 $k=\dfrac{y+1}{x-0}$，整理得 $kx-y-1=0$. …………………………… 8 分

由 $\dfrac{|-2k+2-1|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant 1$，得 $0\leqslant k\leqslant\dfrac{4}{3}$.

故直线 AP 斜率的最大值为 $\dfrac{4}{3}$. ………………………………………………………………………… 10 分

23.【命题意图】本题考查不等式，考查了数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)因为 $t>0$，

所以 $f(x)=|x-t|+2|x+3|=\begin{cases}-(x-t)-2(x+3), x\leqslant -3,\\ -(x-t)+2(x+3), -3<x<t,\\ (x-t)+2(x+3), x\geqslant t,\end{cases}$

即 $f(x)=\begin{cases}-3x+t-6, x\leqslant -3,\\ x+t+6, -3<x<t,\\ 3x-t+6, x\geqslant t.\end{cases}$ …………………………………………………………………… 3 分

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-3]$ 上单调递减，在 $(-3,t)$，$[t,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)_{\min}=f(-3)=9+t-6=5$，得 $t=2$. ………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)知 $t=2$，则 $a+2b=2$.

因为 $a>0,b>0$，

所以 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\times(a+2b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(2+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}+2\right)$

$=2+\frac{1}{2}\left(\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant 2+\frac{1}{2}\times 2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2+2=4$， ………………………………………………… 8 分

当且仅当 $\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a=2b$ 时，等号成立.

又 $a+2b=2$，所以当 $a=1,b=\frac{1}{2}$ 时，$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ 取得最小值 4. …………………………………………… 10 分