湖北省高中名校联盟 2022～2023 学年度下学期高一联合测评

数学试卷参考答案与评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	D	A	B	C	C	B	ACD	BC	ACD	ABD

一、选择题

1. D 【解析】$\because A=[-1,1], B=(0,1], \therefore A\cap B=(0,1]$.

2. B 【解析】$\because z=2+a\mathrm{i}$ 且 $a+2=0$，$\therefore a=-2$.

3. D 【解析】根据四个基本事实可知前三个都是立体几何中的基本事实.

4. A 【解析】由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2}=\sqrt{13}$.

5. B 【解析】$\because x_R=\cos(\angle ROQ+120^\circ), y_R=\sin(\angle ROQ+120^\circ)$ 且 $\cos\angle ROQ=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，

$\therefore x_R=\dfrac{-\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{6}, y_R=\dfrac{-2+\sqrt{15}}{6}$.

6. C 【解析】将函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 向右平移 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}>0)$ 个单位长度得到函数 $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}-\boldsymbol{\varphi}\right)$，由函数 $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}-\boldsymbol{\varphi}\right)$ 是偶函数得到 $\dfrac{\pi}{6}-\boldsymbol{\varphi}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{z})$，又 $\boldsymbol{\varphi}>0$，

$\therefore \boldsymbol{\varphi}_{\min}=\dfrac{2\pi}{3}$.

7. C 【解析】$\because AC/\!/A_1C_1$，$\therefore \angle B_1CA$ 为异面直线 A_1C_1 和 B_1C 所成的角，又 $AC=B_1A=B_1C$，$\therefore \angle B_1CA=60^\circ$，过点 C 作直线 l 的平行线 l'，则当 l' 与 $\angle B_1CA$ 的角平分线重合时，α 取得最小值 30°.

8. B 【解析】由 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{3}{2}\Rightarrow ab=\dfrac{3}{\sin C}$.

$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=ab\cos(\pi-C)=-ab\cos C=-\dfrac{3\cos C}{\sin C}=-\dfrac{3}{\tan C}\in(\sqrt{3},3\sqrt{3})$，

从而 $\tan C\in\left(-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\Rightarrow C\in\left(\dfrac{2}{3}\pi,\dfrac{5}{6}\pi\right)\Rightarrow\dfrac{C}{2}\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{12}\right)$，

$\therefore (c+a-b)(c+b-a)=c^2-(a-b)^2=c^2-a^2-b^2+2ab=-2ab\cos C+2ab$，

$-2ab\cos C+2ab=2ab(1-\cos C)=\dfrac{6(1-\cos C)}{\sin C}=6\tan\dfrac{C}{2}\in(6\sqrt{3},12+6\sqrt{3})$.

9. ACD 【解析】A 对，$z=2-3\mathrm{i}$ 对应的点坐标为 $(2,-3)$ 在第四象限；

B 错，$|1-2\mathrm{i}|=\sqrt{5}$；

C 对，$\mathrm{i}^{4n}+\mathrm{i}^{4n-1}+\mathrm{i}^{4n-2}+\mathrm{i}^{4n-3}=0(n\in\mathbf{N}^*)$，故 $\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\cdots+\mathrm{i}^{2023}=\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3=-1$；

D 对，$z\cdot\bar{z}=|\bar{z}|^2=4$.

10. BC 【解析】A 错，若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$. 又 $\theta\in[0,\pi]$，$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

B 对，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$，当 $\theta=\pi$ 时，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})_{\min}=-1$；

C 对，由选项 B 可知，当 $\theta=\frac{5\pi}{6}$时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

D 错，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{5-2\cos\theta-2\sqrt{3}\sin\theta}=\sqrt{5-4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}$，

当 $\theta=\pi$ 时，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|_{\max}=\sqrt{7}$.

11. ACD 【解析】A 对，平面 $BC_1D//$平面 $AB_1D_1\Rightarrow DP//$平面 AB_1D_1；

B 错，将平面 D_1C_1B 和平面 BC_1C 展开到同一个平面，连接 D_1C 即为所求最小值. 用余弦定理或者过 D_1 作 CC_1 延长线的垂线，再用勾股定理均可得出 $D_1C=\sqrt{2+\sqrt{2}}$；

C 对，当 P 为 B 或 C_1 时，易求得 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$；当 P 为 BC_1 线段中间的点时，过 P 作与平面 $ABCD$、平面 DCC_1D_1、平面 ADD_1A_1 平行的平面，构成一个新长方体，其长、宽、高分别设为 a,b,c，则 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2=1$；

D 对，因为 $A_1C\perp$平面 AB_1D_1，且垂足为 A_1C 上靠近 A_1 的三等分点，则 C 关于平面 AB_1D_1 的对称点 M 为把 CA_1 延长$\frac{1}{3}$倍，于是 M 到平面 $ABCD$ 的距离为$\frac{4}{3}$.

12. ABD 【解析】A 对，有两解的情形为$\frac{\sqrt{3}}{2}c<3<c\Rightarrow3<c<2\sqrt{3}$；

B 对，由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{3}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{3}=2R$，得外接圆半径 $R=\sqrt{3}$，

于是 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=Ra\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BC}\rangle=3\sqrt{3}\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BC}\rangle\in[-3\sqrt{3},3\sqrt{3}]$；

C 错，法一：用投影向量求解：当 $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影向量模最大且与之同向，取得 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的最大值，此时 $OA//BC$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 最大值为 $3\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)=\frac{9}{2}+3\sqrt{3}$；

法二：转化到圆心：$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})=\frac{9}{2}+\left(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OA}\right)_{\max}=\frac{9}{2}+3\sqrt{3}$；

D 对，由正弦定理知 A 点在半径为$\sqrt{3}$的优弧上运动，但是由两段优弧拼接成葫芦状，

所以长度为$\frac{4}{3}\pi\times\sqrt{3}\times2=\frac{8}{3}\sqrt{3}\pi$.

三、填空题

13. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 【解析】在$\triangle ABC$ 中，由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$可解出 $\sin A=\frac{1}{3}$，又 $A<B$，故 $\cos A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

14. $\left(\frac{6}{5},\frac{8}{5}\right)$ 【解析】$\overrightarrow{AB}=(2,1)$，$\overrightarrow{CD}=(3,4)$，由投影向量公式可得.

15. $f(x)=x$ 【解析】取 $f(x)=x$，则 $y=f(x+1)-1=(x+1)-1=x$ 符合题意.

16. 3π 【解析】正三棱锥 $A-BCD$ 为正方体的一个墙角，E 为等边ΔBCD 的中心.

因为平面 $ABC\perp$平面 ABD，$FG\perp$平面 ABD，则 G 在 AB 上.

知四面体 $AEFG$ 为鳖臑模型，则 AE 即为外接球的直径，即 $2R=\sqrt{3}$，$R=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$S=4\pi R^2=3\pi$.

（本题也可以把立体图形放在正方体中，更方便理解各个垂足所在的位置）

四、解答题

17. (1) $\because \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，$\therefore$ 由 $\boldsymbol{c}//\boldsymbol{d} \Rightarrow \frac{m}{2}=\frac{-2}{3} \Rightarrow m=-\frac{4}{3}$. ………………………………………… 5 分

(2) $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=2m\boldsymbol{a}^2-6\boldsymbol{b}^2+(3m-4)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=27m-36=0 \Rightarrow m=\frac{4}{3}$. ………………………………… 10 分

18. (1) 由 $2\sin A-\sqrt{3}\cos C=\frac{\sqrt{3}\sin C}{\tan B}=\frac{\sqrt{3}\sin C\cos B}{\sin B}$

$\Rightarrow 2\sin A\sin B-\sqrt{3}\cos C\sin B=\sqrt{3}\sin C\cos B$. ……………………………………………………… 3 分

又 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin(B+C)=\sin A$，$\therefore 2\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin A$. ……………………………… 4 分

$A\in(0,\pi)\Rightarrow \sin A\neq 0$，则 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $B\in(0,\pi)\Rightarrow B=\frac{\pi}{3}$ 或 $B=\frac{2\pi}{3}$. ………………………… 6 分

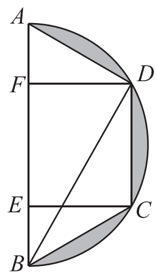
(2) $\because$ 角 B 是锐角，由(1)得 $B=\frac{\pi}{3}$，$C=\frac{2\pi}{3}-A$. ……………………………………………………… 7 分

$\therefore \sin A+\sin C=\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$. ……………………… 9 分

$\because A\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$，$\therefore A+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，$\therefore \sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，$\therefore \sin A+\sin C\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right]$. ……… 11 分

$\therefore \sin A+\sin B+\sin C$ 的取值范围是 $\left(\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$. …………………………………………………… 12 分

19. (1) 该几何体中间空心部分为一个圆柱和两个等高的圆锥拼接而成的组合体，且圆柱的上下底面分别为两个圆锥的底面. 该旋转体为球体挖去上述组合体而形成的几何体.（写出“圆柱”、“圆锥”、“球”中一项给 1 分，两项给 3 分） ……………………………………………………………………………… 3 分



(2) 连接 BD，则 $AD\perp BD$. 分别过 C,D 作 AB 的垂线，垂足分别为 E,F.

$\angle BAD=60°$，$AB=4$，则 $AD=2$，$DF=\sqrt{3}$，$AF=1$.

同理 $BC=2$，$CE=\sqrt{3}$，$BE=1$，$EF=4-1-1=2$，即 $CD=2$. …………………… 6 分

体积为球的体积，减去两个圆锥的体积，减去圆柱的体积

$V=\frac{4}{3}\pi\times 2^3-2\times\frac{1}{3}\times\pi(\sqrt{3})^2\times 1-\pi\times(\sqrt{3})^2\times 2=\frac{8}{3}\pi$. ………………………… 12 分

20. (1) 在 $\triangle ABC$，$\triangle ADC$ 中，$AB=2$，$BC=6$，$AD=CD=4$，根据余弦定理，

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B=4+36-24\cos B=40-24\cos B$.

同理，在 $\triangle ADC$ 中，$AC^2=32-32\cos D$.

所以 $40-24\cos B=32-32\cos D$，化简得 $3\cos B-4\cos D=1$. ………………………………………… 5 分

(2) 由(1)有 $\cos D=\frac{3\cos B-1}{4}$.

由题意 $S_1^2=\left(\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin B\right)^2=\left(\frac{1}{2}\times 2\times 6\sin B\right)^2=36\sin^2 B=36(1-\cos^2 B)$， …………… 7 分

同理可得，$\triangle ADC$ 的面积 S_2，

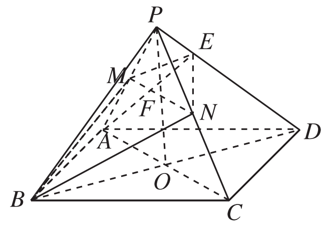
$S_2^2=(8\sin D)^2=64-64\cos^2 D=64-4(3\cos B-1)^2=60-36\cos^2 B+24\cos B$. ………………… 10 分

令 $\cos B=x$，则

$S_1^2+S_2^2=36(1-x^2)+60+24x-36x^2=24(-3x^2+x+4)$，

所以，当 $x=\cos B=\frac{1}{6}$ 时，$S_1^2+S_2^2$ 取得最大值，最大值为 98. ………………………………… 12 分

21. (1)连 AC,并取 AC 中点 O,连 PO.



$$\left.\begin{array}{l}\text{正方形 } ABCD \Rightarrow AC \perp BD \\ PA=PC \Rightarrow AC \perp PO \\ PO \cap BD=O \\ PO \subset \text{平面 } PBD \\ BD \subset \text{平面 } PBD\end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp \text{平面 } PBD.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{又 } MN // AC \Rightarrow MN \perp \text{平面 } PBD \\ MN \subset \text{平面 } BMN\end{array}\right\} \Rightarrow \text{平面 } PBD \perp \text{平面 } BMN.$$ ………………………… 4 分

(2)设 PO 与 MN 相交于点 F,则 F 为 PO 的中点,延长 BF 交 PD 于点 E,连接 EM,EN.

由 $BC=\sqrt{2}$,则 $BD=2$,则$\triangle PBD$ 为等边三角形.

因为平面 $PBD \perp$ 平面 BMN,所以 P 到平面 BMN 的距离等于 P 到直线 BE 的距离.

$BF=\sqrt{BO^2+OF^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$,$PF=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$PB=2$. ………………………… 5 分

在$\triangle PBF$ 中,用余弦定理,得 $\cos\angle PBF=\dfrac{2^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2\times 2\times\frac{\sqrt{7}}{2}}=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}=\dfrac{5}{14}\sqrt{7}$.

则 $\sin\angle PBF=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

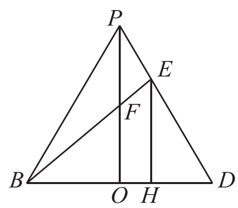
则 P 到直线 BE 的距离 $d=PB\sin\angle PBF=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. ………………………… 7 分

直线 PB 与平面 BMN 所成角的正弦值 $\sin\theta=\dfrac{d}{PB}=\dfrac{\frac{\sqrt{21}}{7}}{2}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$. ………………………… 8 分

(此问若直接说明$\angle PBF$ 为所求的角,从而计算也可给 8 分;或者用等体积法求距离均可.)

(3)过 E 作 $EH \perp BD$ 于 H,设 $DH=x$,则 $EH=\sqrt{3}x$,$OH=1-x$,$OF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$OB=1$,



由 $\dfrac{OF}{EH}=\dfrac{BO}{BH}$,得 $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}x}=\dfrac{1}{2-x}$,解出 $DH=x=\dfrac{2}{3}$.

即 E 点为 PD 上靠近 P 点的三等分点. ………………………… 9 分

在$\triangle PBE$ 中,$BE=\sqrt{2^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\times 2\times\frac{2}{3}\cos 60^\circ}=\dfrac{2}{3}\sqrt{7}$.

四棱锥 $P-ABCD$ 的高 $PO=\sqrt{3}$,则 $V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$. ………………………… 10 分

四边形 $BMEN$ 的对角线垂直,则

$V_{P-BMEN}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times BE\times MN\times d=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\sqrt{7}\times 1\times\dfrac{\sqrt{21}}{7}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$,

下方几何体体积 $V_{\text{下}}=V_{P-ABCD}-V_{P-BMEN}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{9}=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$,

所以$\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{9}}{\frac{5\sqrt{3}}{9}}=\dfrac{1}{5}$. …………………………………………………………………………………… 12 分

22. (1)当 $a=0$ 时，$f(x)=x$ 在$(0,+\infty)$上单调递增；…………………………………………………… 1 分

当 $a<0$ 时，$f(x)=x+\dfrac{a}{x}$在$(0,+\infty)$上单调递增；…………………………………………………… 3 分

当 $a>0$ 时，$f(x)=x+\dfrac{a}{x}$在$(0,\sqrt{a})$上单调递减，在$(\sqrt{a},+\infty)$上单调递增. …………………… 5 分

(2)$\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，令 $x=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\in[1,\sqrt{2}]$，

则 $\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，$\sin2\theta=x^2-1$.

则原方程化简为 $x^4+kx^3+kx^2+kx+1=0$. …………………………………………………… 7 分

因为 $x^3+x^2+x>0$，则方程进一步转化为 $k=-\dfrac{x^4+1}{x^3+x^2+x}=-\dfrac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x+\frac{1}{x}+1}$. ………………… 10 分

令 $t=x+\dfrac{1}{x}$，由(1)及 $x\in[1,\sqrt{2}]$知 $t\in\left[2,\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\right]$.

则 $k=-\dfrac{t^2-2}{t+1}=-\left[(t+1)-\dfrac{1}{t+1}-2\right]$，由(1)知关于 t 的函数在$\left[2,\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\right]$单调递减，

所以当 $t=2$ 时，k 的最大值为$-\dfrac{2}{3}$. …………………………………………………………………… 12 分