2024届高三开学摸底联考 全国卷

文科数学试题

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为120分钟，满分150分

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{x|x>2\}$，则 $A\cap B=$

A.$\{1\}$　　B.$\{3,4\}$　　C.$\{2,3,4\}$　　D.$\{1,2,3,4\}$

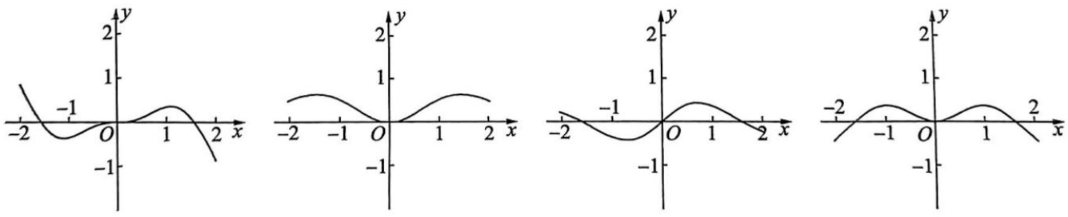
2.已知复数 $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$（i是虚数单位），则复数 $\bar{z}$ 对应的点位于

A.第一象限　　B.第二象限　　C.第三象限　　D.第四象限

3.已知 $\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=\frac{8}{5}$，则 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=$

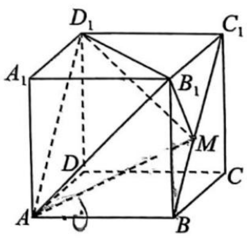
A.$\frac{3}{5}$　　B.$\frac{4}{5}$　　C.$-\frac{3}{5}$　　D.$-\frac{4}{5}$

4.函数 $f(x)=\frac{2x\sin x}{e^x+e^{-x}}$（e为自然对数的底数）在 $[-2,2]$ 的大致图象是



A　　B　　C　　D

5.如图，在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 在对角线 BC_1 上移动，异面直线 AM 与 DC 所成角为 θ，则 $\sin\theta$ 的最大值为



A.$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{3}$

C.$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D.$\frac{2}{3}$

6.已知椭圆 $\frac{x^2}{10-t}+\frac{y^2}{t-4}=1$ 的焦点在 y 轴上，若焦距为4，则该椭圆的离心率为

A.$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B.$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C.$\frac{1}{2}$　　D.$\frac{\sqrt{3}}{3}$

7.在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，$D$在边$BC$上，$\angle DAC=\frac{\pi}{6}$，$AB=AC=2\sqrt{3}$，则$AD=$

A.$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　B.1　　C.2　　D.$\sqrt{3}$

8.已知函数$f(x)=x$，$g(x)=\ln x$，若直线$x=t$与$f(x)$和$g(x)$的图象分别交于点M，N，则$|MN|$的最小值为

A.1　　B.$\frac{1}{2}+\ln 2$　　C.$2-\ln 2$　　D.$e-1$

9."三分损益法"是古代中国发明的制定音律时所用的生律法.例如：假设能发出第一个基准音的乐器的长度为36，那么能发出第二个基准音的乐器的长度为$36\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=24$，能发出第三个基准音的乐器的长度为$24\times\left(1+\frac{1}{3}\right)=32$，……，也就是依次先减少三分之一，后增加三分之一，以此类推.现有一兴趣小组采用此规律构造了一个共12项的数列$\{a_n\}$用来研究数据的变化，已知$a_8=192$，则$a_5=$

A.324　　B.297　　C.256　　D.168

10.已知实数m，n满足$0<m<\frac{1}{2}$，$1<n<2$，则下列关系中正确的是

A.$mn^2>1$　　B.$\sin m>\sin\frac{1}{n}$　　C.$m^n<n^m$　　D.$\log_m n<\log_n m$

11.已知函数$f(x)=\begin{cases}x^3-3x, x<0,\\ 2^x-2, x\geqslant 0,\end{cases}$若关于$x$的方程$f^2(x)-(a+2)f(x)+2a=0$有5个不同的实根，则实数$a$的取值范围为

A.$(-1,0)$　　B.$(-1,2)$　　C.$(0,1)$　　D.$(0,2)$

12.已知在三棱锥$P-ABC$中，$PA+BC=4$，$AB\perp AC$，$PA\perp$平面ABC，则三棱锥$P-ABC$的外接球表面积的最小值为

A.π　　B.4π　　C.8π　　D.12π

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13.已知t为实数，$\boldsymbol{a}=(2,t)$，$\boldsymbol{b}=(3,0)$，则向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$方向上的投影为________.

14.若实数x，y满足不等式组$\begin{cases}x-y-4\leqslant 0,\\ x-3y\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$则$z=(x-5)^2+y^2$的最小值为________.

15.已知双曲线E的一个焦点为F，点F到双曲线E的一条渐近线$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$的距离为1，则双曲线E的标准方程是________.

16.已知函数$f(x)=x^3+3x^2+x+1$，设数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=-2n+9$，则$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_9)=$________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：60 分.

17.(12 分)某高校 A 课程的教师为了解本学期选修该课程的学生的情况，随机调查了 200 名选该课程的学生的一些情况，具体数据如下表：

	本专业	非本专业	合计
女生	70		80
男生		40	
合计			

(1)根据已知条件完成上面的 2×2 列联表，并判断是否有 99.9%的把握认为选修 A 课程的是否为本专业学生与学生性别有关；

(2)从样本中为“非本专业”的学生中，先按性别比例用分层抽样的方法抽出 5 人，再从这 5 人中随机抽取 3 人，求 3 人都是男生的概率.

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

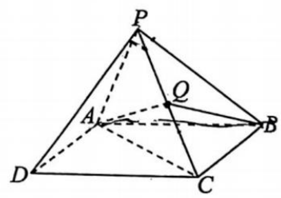
参考数据：

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

18.(12 分)如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面四边形 $ABCD$ 为矩形，平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，$PA\perp PB$，$AB=\sqrt{5}$，$PB=BC=2$，点 Q 为 PC 的中点.

(1)求证：平面 $ABQ\perp$ 平面 PAC；

(2)求三棱锥 $P-QBD$ 的体积.



19.(12 分)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0$，且有 $\dfrac{a_{n+1}+2}{2}=a_n+n$.

(1)证明：数列 $\{a_n+2n\}$ 是等比数列；

(2)求数列 $\left\{\dfrac{n}{a_n+2n}\right\}$ 的前 n 项和 S_n.

20.(12 分)已知点 F 为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$的焦点,点 $P(1,2),Q(0,1)$,且$|PF|=|QF|$.

(1)求抛物线 C 的标准方程;

(2)若正方形 $ABCD$ 的顶点 A、B 在直线 $l:x-y+2=0$ 上,顶点 C、D 在抛物线 C 上,求$|FC|+|FD|$.

21.(12 分)已知函数 $f(x)=\ln x-x+(x-2)e^x-m,m\in\mathbf{Z}$.

(1)当 $m=1$ 时,求曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程;

(2)若关于 x 的不等式 $f(x)<0$ 在$(0,1]$上恒成立,求 m 的最小值.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,射线 l 的方程为 $y=\sqrt{3}x(x\geqslant0)$,曲线 C 的方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$.以坐标原点为极点,x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求射线 l 和曲线 C 的极坐标方程;

(2)若射线 l 与曲线 C 交于点 P,将射线 OP 绕极点按逆时针方向旋转$\frac{\pi}{3}$交 C 于点 Q,求$\triangle POQ$ 的面积.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10 分)

设函数 $f(x)=|2x-2|+|2x+a|$.

(1)当 $a=4$ 时,求不等式 $f(x)\geqslant26$ 的解集;

(2)若 $a>0,b>0,f(x)$的最小值为 m,且 $m+b=6$,求证:$\frac{1}{a+4}+\frac{1}{4b}\geqslant\frac{9}{32}$.

2024 届高三开学摸底联考　全国卷

文科数学参考答案及评分意见

1.B 【解析】因为 $B=\{x\mid x>2\}$，又 $A=\{1,2,3,4\}$，由交集的运算可知：$A\cap B=\{3,4\}$.故选 B.

2.C 【解析】由题可知，$\bar{z}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，对应点为$\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，位于第三象限.故 C 正确.故选 C.

3.B 【解析】由题$\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{5}$.故选 B.

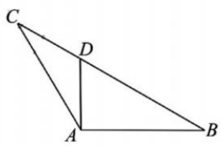
4.B 【解析】由题知 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=\frac{2\cdot(-x)\cdot\sin(-x)}{e^{-x}+e^{x}}=f(x)$，即 $f(x)$为偶函数，所以图象关于 y 轴对称，排除 A、C.又 $f(1)=\frac{2\sin 1}{e+e^{-1}}<1$，$f(2)=\frac{4\sin 2}{e^{2}+e^{-2}}>0$，故选 B.

5.C 【解析】因为 $AB\parallel DC$，所以$\angle BAM$ 为异面直线 AM 与 DC 所成角 θ，又 $AB\perp$平面 BB_1C_1C，M 与 B 不重合时，$\triangle BAM$ 为直角三角形，当$\angle BAM$ 越大时其正弦值也越大，当 M 与 C_1 重合时$\angle BAM$ 最大，此时在 $\mathrm{Rt}\triangle BAC_1$ 中 $\sin\theta=\frac{BC_1}{AC_1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.故选 C.

6.B 【解析】由题得 $t-4>10-t>0$ 即 $7<t<10$，由焦距为 4 得 $t-4-(10-t)=4$，解得 $t=9$，离心率为$\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.故选 B.

7.C 【解析】解法 1：由题$\angle DAB=\frac{\pi}{2}$，由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，则$\frac{1}{2}AC\cdot AB\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\times AB\times AD+\frac{1}{2}\times AC\times AD\cdot\sin\frac{\pi}{6}$，化简得$\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\times AD+\frac{1}{2}\times AD\times\frac{1}{2}$，解得 $AD=2$.故选 C.

解法 2：如图：在直角三角形 ABD 中，$AD=AB\tan\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=2$.故选 C.



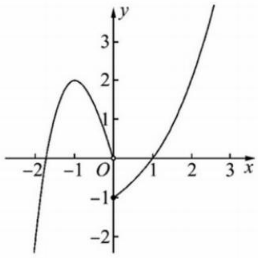
8.A 【解析】由题$|MN|=x-\ln x(x>0)$，不妨令 $h(x)=x-\ln x$，则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}$.令 $h'(x)=0$，解得 $x=1$，因为 $x\in(0,1)$时，$h'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)>0$，所以当 $x=1$ 时，$|MN|$最小为 1.故选 A.

9.A 【解析】$a_8=a_5\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)$，即 $a_5\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=192$，解得：$a_5=324$.故选 A.

10.C 【解析】由题易知，取 $m=\frac{1}{4}$，$n=\frac{3}{2}$，则 $mn^2=\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{16}<1$，所以 A 错误；$0<m<\frac{1}{2}<\frac{1}{n}<1<\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin m<\sin\frac{1}{n}$，B 错误；$m^n<1$，$n^m>1$，所以 $m^n<n^m$，C 正确；$\frac{1}{m}>2$，$\frac{1}{2}<\frac{1}{n}<1$，$\log_m n>\log_m\frac{1}{m}=-1$，$\log_n m<\log_n\frac{1}{n}=-1$，即 $\log_m n>\log_n m$，D 错误.故选 C.

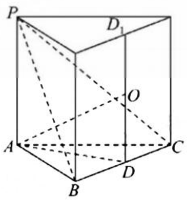
11.D 【解析】当 $x<0$ 时，$f(x)=x^3-3x$，则 $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$，当 $x\in(-\infty,-1)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，当 $x\in(-1,0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，作出 $f(x)$的图象，如图所示，$f^2(x)-(a+2)$

$f(x)+2a=(f(x)-a)(f(x)-2)=0$,



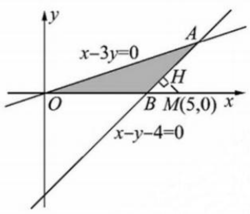
即 $f(x)=a$ 与 $f(x)=2$ 共 5 个不等实根,由图可知 $f(x)=2$ 时,$x=-1$ 或 $x=2$,即 $f(x)=2$ 有两个根,若使 $f(x)=a$ 与 $f(x)=2$ 共 5 个不等实根,只需满足 $0<a<2$.故选 D.

12.C 【解析】将三棱锥补成直三棱柱,设点 D,D_1 为上下底面的外心,点 O 为直棱柱的外接球的球心,则 O 为 DD_1 的中点,点 D 为 BC 的中点,AD 为底面外接圆的半径,设 $PA=x$,$BC=4-x$,所以 $OD=\frac{x}{2}$,$AD=\frac{4-x}{2}=2-\frac{x}{2}$,得外接球半径 $R=AO=\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(2-\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}(x-2)^2+2}$,当 $x=2$ 时,R 有最小值为$\sqrt{2}$,此时球 O 的表面积为:$4\pi R^2=8\pi$.故选 C.



13.2 【解析】由题 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{6}{\sqrt{9+0}}=2$.

14.$\frac{1}{2}$ 【解析】由题作出不等式组表示的平面区域,如图所示,目标函数 $z=(x-5)^2+y^2$ 可化为:可行域内的点到点 $M(5,0)$的距离的平方,易知当 $MH\perp$直线 $x-y-4=0$ 时,z 最小,此时 $z_{\min}=\left(\frac{5-0-4}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$.



15.$\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 或$\frac{y^2}{\frac{1}{3}}-x^2=1$ 【解析】当焦点在 x 轴上时,设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,则其渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$,点 F 到双曲线 E 的一条渐近线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的距离为 1,即$\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3},\\ b=1,\end{cases}$即 $a=\sqrt{3}$,所以此时双曲线 E 的标准方程为$\frac{x^2}{3}-y^2=1$;当焦点在 y 轴上时,设双曲线方程为$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,则其渐近线方程为$y=$

$\pm\frac{a}{b}x$，点 F 到双曲线 E 的一条渐近线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的距离为 1，即 $\begin{cases}\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}}{3},\\ b=1,\end{cases}$ 即 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以此时双曲线 E 的标准方程为 $\frac{y^2}{\frac{1}{3}}-x^2=1$.综上，双曲线 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 或 $\frac{y^2}{\frac{1}{3}}-x^2=1$.

16.18 【解析】$f(x)=x^3+3x^2+x+1=(x+1)^3-2(x+1)+2$，所以曲线 $f(x)$ 的对称中心为 $(-1,2)$，即 $f(x)+f(-2-x)=4$，因为 $a_n=-2n+9$，易知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_5=-1$，$a_1+a_9=a_2+a_8=a_3+a_7=a_4+a_6=2a_5=-2$，所以 $f(a_1)+f(a_9)=f(a_2)+f(a_8)=f(a_3)+f(a_7)=f(a_4)+f(a_6)=4$，所以 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_9)=4\times4+2=18$.

17.**解**：(1)由题可知学生共 200 人，则男生人数为 200−80=120 人，本专业男生人数为 120−40=80 人，非本专业女生人数为 80−70=10 人.

故 2×2 列联表如下：

	本专业	非本专业	合计
女生	70	10	80
男生	80	40	120
合计	150	50	200

…………………………………… 3 分

所以 $K^2=\frac{200\times(70\times40-80\times10)^2}{150\times50\times80\times120}=\frac{100}{9}\approx11.111$.

因为 11.111>10.828，…………………………………… 6 分

所以有 99.9%的把握认为选修 A 课程的是否为本专业学生与学生性别有关

(2)样本中为“非本专业”的学生有 50 人，男、女人数之比为 4:1.

故用分层抽样方法从中抽出 5 人，男生有 4 人，记为 A_1,A_2,A_3,A_4，女生有 1 人，记为 B， ………… 8 分

从这 5 人中再随机抽取 3 人，有 (A_1,A_2,A_3)，(A_1,A_2,A_4)，(A_2,A_3,A_4)，(A_1,A_3,A_4)，(A_1,A_2,B)，(A_1,A_3,B)，(A_1,A_4,B)，(A_2,A_3,B)，(A_2,A_4,B)，(A_3,A_4,B) 共 10 个结果，

其中 3 人都是男生的结果有 4 个，…………………………………… 10 分

所以 3 人都是男生的概率为 $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$. …………………………………… 12 分

18.(1)**证明**：∵平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，$BC\perp AB$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，

∴$BC\perp$ 平面 PAB，又∵$AP\subset$ 平面 PAB，

∴$BC\perp AP$. …………………………………… 2 分

又∵$PA\perp PB$，$BC\cap BP=B$，$BC,BP\subset$ 平面 BCP，

∴$AP\perp$ 平面 BCP，$BQ\subset$ 平面 BCP，即 $AP\perp BQ$. …………………………………… 3 分

在△BCP 中，$PB=BC$，Q 为 PC 的中点，

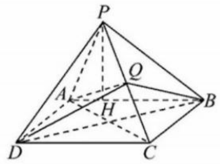
∴$BQ\perp PC$， …………………………………… 4 分

又 $AP\cap PC=P$，$AP,PC\subset$ 平面 PAC，

∴$BQ\perp$ 平面 PAC， …………………………………… 5 分

又 $BQ\subset$ 平面 ABQ，

∴平面 $ABQ\perp$ 平面 PAC. …………………………………… 6 分



(2)**解**:作 $PH\perp AB$ 于点 H,易知 $PH\perp$ 平面 $ABCD$,

在 $Rt\triangle PAB$ 中,$PA=\sqrt{AB^2-PB^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-2^2}=1$,

则 $PH=\dfrac{PA\cdot PB}{AB}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, ………………………… 7分

∵点 Q 为 PC 的中点,

∴点 P 到平面 QBD 的距离等于点 C 到平面 QBD 的距离,

即 $V_{P-QBD}=V_{C-QBD}=V_{Q-BCD}$. ………………………… 8分

又点 Q 到平面 BCD 的距离等于点 P 到平面 BCD 的距离的一半,即 $h=\dfrac{PH}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, ………… 9分

$S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{5}=\sqrt{5}$, ………………………… 10分

所以 $V_{Q-BCD}=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle BCD}\times h=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{5}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{1}{3}$, ………………………… 11分

所以三棱锥 $P-QBD$ 的体积为$\dfrac{1}{3}$. ………………………… 12分

19.(1)**证明**:由题$\dfrac{a_{n+1}+2}{2}=a_n+n$,即 $a_{n+1}=2a_n+2n-2$,

所以$\dfrac{a_{n+1}+2(n+1)}{a_n+2n}=\dfrac{2a_n+2n-2+2(n+1)}{a_n+2n}=\dfrac{2a_n+4n}{a_n+2n}=2$,………………………… 3分

$a_1+2=2$, ………………………… 4分

所以$\{a_n+2n\}$是以 2 为首项,2 为公比的等比数列. ………………………… 5分

(2)**解**:由(1)知,$a_n+2n=2\times2^{n-1}=2^n$,所以$\dfrac{n}{a_n+2n}=\dfrac{n}{2^n}$, ………………………… 6分

所以 $S_n=1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^1+2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\cdots+n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$,………………………… 8分

$\dfrac{1}{2}S_n=1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\cdots+(n-1)\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$, ………………………… 9分

两式相减得,

$\dfrac{1}{2}S_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}=1-\left(1+\dfrac{n}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$,…

………………………… 11分

即 $S_n=2-(2+n)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$,$n\in\mathbf{N}^*$. ………………………… 12分

20.**解**:(1)由题设 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$,则$|PF|=\sqrt{\left(1-\dfrac{p}{2}\right)^2+4}$,$|QF|=\sqrt{\left(0-\dfrac{p}{2}\right)^2+1}$,

又$|PF|=|QF|$,故$\sqrt{\left(1-\dfrac{p}{2}\right)^2+4}=\sqrt{\left(0-\dfrac{p}{2}\right)^2+1}$,整理得 $p-4=0$,即 $p=4$.

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=8x$. ………………………… 4分

(2)因为 $ABCD$ 是正方形,所以 $AB/\!/CD$,直线 l 与 CD 之间的距离等于$|CD|$,

设直线 CD 的方程为:$y=x+m$,与 $y^2=8x$ 联立,消去 x 得:$y^2-8y+8m=0$,

由 $\Delta=64-32m>0$ 得 $m<2$,………………………………………………………… 6 分

设 $C(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=8,y_1y_2=8m$,

所以 $|CD|=\sqrt{2}|y_1-y_2|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=8\sqrt{2-m}$, …………………… 8 分

直线 l 与 CD 间的距离为 $d=\frac{|m-2|}{\sqrt{2}}$,

所以 $8\sqrt{2-m}=\frac{|m-2|}{\sqrt{2}}$,整理得:$128(2-m)=(m-2)^2$,

由于 $m<2$,故解得 $m=-126$,………………………………………………………… 10 分

所以 $x_1+x_2=y_1+y_1-2m=8+252=260$,

故 $|FC|+|FD|=x_1+x_2+p=260+4=264$.…………………………………………………… 12 分

21.**解**:(1)由题当 $m=1$ 时,$f(x)=\ln x-x+(x-2)e^x-1$,

$f'(x)=\frac{1}{x}+(x-1)e^x-1,f'(1)=0,f(1)=-e-2$,

所以切线方程为 $y+e+2=0(x-1)$,化简得 $y=-e-2$,

即曲线 $f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y=-e-2$.………………………………… 4 分

(2)由 $f(x)<0$ 可得 $m>\ln x-x+(x-2)e^x$,

令 $g(x)=\ln x-x+(x-2)e^x,x\in(0,1]$,

则 $g'(x)=(x-1)\left(e^x-\frac{1}{x}\right)$, ………………………………………………………… 5 分

当 $0<x\leqslant1$ 时,$x-1\leqslant0$,………………………………………………………… 6 分

设 $h(x)=e^x-\frac{1}{x}$,易知 $h(x)$在$(0,1]$上单调递增, ……………………………………… 7 分

又 $h(1)=e-1>0,h\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$,

则存在 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,使得 $h(x_0)=0$,即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$,

取对数得 $\ln x_0=-x_0$,……………………………………………………………… 8 分

当 $x\in(0,x_0)$时,$h(x)<0,g'(x)>0,g(x)$单调递增,

当 $x\in(x_0,1]$时,$h(x)>0,g'(x)\leqslant0,g(x)$单调递减,

$\therefore g(x)_{\max}=(x_0-2)\cdot e^{x_0}+\ln x_0-x_0=(x_0-2)\cdot\frac{1}{x_0}-2x_0=1-\left(\frac{2}{x_0}+2x_0\right)$, ………………………… 10 分

$\because y=1-\left(\frac{2}{x}+2x\right)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上单调递增,则 $g(x_0)\in(-4,-3)$, …………………………… 11 分

又 $m>g(x)$对任意 $x\in(0,1]$恒成立,$m\in\mathbf{Z}$,

所以 $m\geqslant g(x_0)$,即 m 的最小值为-3.………………………………………………… 12 分

22.**解**:(1)将 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$ 代入 $y=\sqrt{3}x(x\geqslant0)$得 $\rho\sin\theta=\sqrt{3}\rho\cos\theta$,所以 $\tan\theta=\sqrt{3}$,所以射线 l 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\geqslant0)$,

将 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$ 代入 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 得 $\rho^2\cos^2\theta+\frac{\rho^2\sin^2\theta}{4}=1$,所以曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2=\frac{4}{1+3\cos^2\theta}$ $(\rho>0)$. ……………………………………………………………………… 5 分

(2)由题意可设点 P 的极坐标为$\left(\rho_1,\frac{\pi}{3}\right)$,点 Q 的极坐标为$\left(\rho_2,\frac{2\pi}{3}\right)$,

则 $\rho_1^2=\dfrac{4}{1+3\cos^2\frac{\pi}{3}}=\dfrac{16}{7}$,$\rho_2^2=\dfrac{4}{1+3\cos^2\frac{2\pi}{3}}=\dfrac{16}{7}$,

因为 $\rho_1>0$,$\rho_2>0$,所以 $\rho_1=\rho_2=\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$,

所以 $S_{\triangle POQ}=\dfrac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{7}}{7}\times\dfrac{4\sqrt{7}}{7}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$. ………… 10 分

23.**解**:(1)当 $a=4$ 时,函数 $f(x)=|2x-2|+|2x+4|$, ………… 1 分

①当 $x<-2$ 时,由 $f(x)=-2-4x\geqslant 26$ 得 $x\leqslant -7$; ………… 2 分

②当 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 时,由 $f(x)=6\geqslant 26$ 无解; ………… 3 分

③当 $x>1$ 时,由 $f(x)=4x+2\geqslant 26$ 得 $x\geqslant 6$. ………… 4 分

综上,不等式 $f(x)\geqslant 26$ 的解集为 $(-\infty,-7]\cup[6,+\infty)$. ………… 5 分

(2)因为 $f(x)=|2x-2|+|2x+a|\geqslant|2x-2-(2x+a)|=a+2$,

当 $-\dfrac{a}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 时,$f(x)$取到最小值 $a+2$, ………… 6 分

所以 $a+2+b=6$,即 $a+4+b=8$.

所以$\dfrac{1}{a+4}+\dfrac{1}{4b}=\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{a+4}+\dfrac{1}{4b}\right)(a+4+b)=\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{5}{4}+\dfrac{b}{a+4}+\dfrac{a+4}{4b}\right)\geqslant\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{5}{4}+2\sqrt{\dfrac{b}{a+4}\times\dfrac{a+4}{4b}}\right)=\dfrac{9}{32}$, … 8 分

当且仅当 $a+4=2b$ 时,即 $a=\dfrac{4}{3}$,$b=\dfrac{8}{3}$ 等号成立,即$\dfrac{1}{a+4}+\dfrac{1}{b}\geqslant\dfrac{9}{32}$成立. ………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。