江淮十校 2023 届高三第二次联考

数 学 试 题

2022.11

命审单位:一六八中学　　命审人:刘大锐　王中学

注意事项:

1. 本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
3. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
4. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共 8 小题. 每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.

1. 若集合 $M=\{x|4x^2>1\}$, $N=\{x|2x\geqslant1\}$,则 $M\cap N=$

A. $\left\{x|x\geqslant\frac{1}{2}\right\}$　　B. $\left\{x|-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2}\right\}$

C. $\left\{x|x>\frac{1}{2}\right\}$　　D. $\varnothing$

2. 设 $x\in\mathbf{R}$,则" $\cos x=1$ "是" $\sin x=0$ "的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 我们平时听到的乐音不只是一个音在响,而是许多个音的结合,称为复合音. 复合音的产生是因为发声体在全段振动,产生频率为 f 的基音的同时,其各部分如二分之一、三分之一、四分之一部分也在振动,产生的频率恰好是全段振动频率的倍数,如 $2f,3f,4f$ 等. 这些音叫谐音,因为其振幅较小,一般不易单独听出来,所以我们听到的声音的函数为 $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin 4x+\cdots$. 则函数 $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 的周期为

A. π　　B. 2π

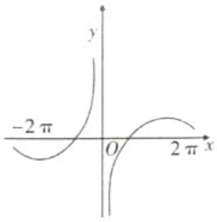
C. $\frac{2}{3}\pi$　　D. $\frac{\pi}{2}$

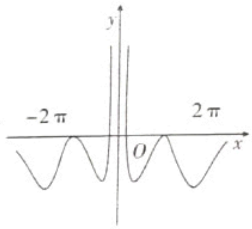
4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=(n+1)\left(\frac{2022}{2023}\right)^n$,则当 a_n 取得最大值时 n 的值为

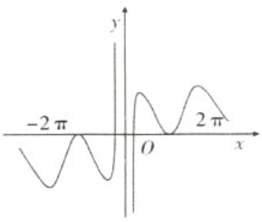
A. 2024　　B. 2023 或 2022

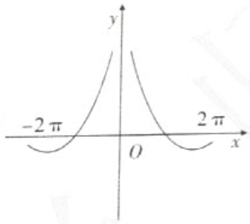
C. 2022　　D. 2022 或 2021

5. 函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\pi^2}$ 在区间 $[-2\pi,0)\cup(0,2\pi]$ 上的图象大致为

A.


B.


C.


D.


6. 已知向量 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(4,-2)$，$\vec{c}=t\vec{a}+\vec{b}$. 若 $\vec{c}$ 在 $\vec{a}$ 方向上投影向量模长为 $\sqrt{5}$，则实数 t 为

A. -2　　B. -1　　C. ± 1　　D. ± 2

7. 已知实数 $a=0.9$，$b=\frac{1}{e^{0.1}}$，$c=\ln 1.9$，则

A. $c>b>a$　　B. $b>a>c$　　C. $a>b>c$　　D. $b>c>a$

8. 我国古代数学著作《九章算术》中有如下问题："今有人持金出五关，前关二税一，次关三而税一，次关四而税一，次关五而税一，次关六而税一，并五关所税，适重一斤. 问本持金几何?"其意思为"今有人持金出五关，第1关收税金为持金的 $\frac{1}{2}$，第2关收税金为剩余金的 $\frac{1}{3}$，第3关收税金为剩余金的 $\frac{1}{4}$，第4关收税金为剩余金的 $\frac{1}{5}$，第5关收税金为剩余金的 $\frac{1}{6}$，5关所收税金之和恰好重1斤. 问原来持金多少?". 记这个人原来持金为 a 斤，设 $f(x)=\begin{cases}f(x-1),x>1\\ \log_5 x,0<x\leqslant 1\end{cases}$，则 $f(a)=$

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. 2

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对得5分，部分选对得2分，有选错得0分.

9. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos x$，则下列结论正确的是

A. 导函数为 $f'(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 对称

C. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right)$ 上是增函数

D. 函数 $f(x)$ 的图象可由函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，再向上平移 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 个单位长度得到

10. 已知函数 $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $g(x+2)=g(x-2)$. 若 $x\in[0,2]$ 时，$g(x)=\sqrt{2x-x^2}$，则下列结论正确的有

A. 函数 $g(x)$ 的值域为 $[-1,1]$

B. 函数 $g(x)$ 图象关于直线 $x=1$ 对称

C. 当实数 $k=\pm\frac{2}{5}$ 时，关于 x 的方程 $|g(x)|+g(|x|)=kx$ 恰有三个不同实数根

D. 当实数 $k\in\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{5}}{10}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{5}}{10},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 时，关于 x 的方程 $|g(x)|+g(|x|)=kx$ 恰有四个不同实根.

11. 已知 a,b 均为正实数，下列结论正确的有

A. 若 $a+b=2$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2$

B. 若 $a+b=2$，则 $\frac{1+b}{ab}\geqslant 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. 若 $a+b=1$，则 $\sqrt{a}+2\sqrt{b}\leqslant\sqrt{5}$

D. 当且仅当 $a=\sqrt{2}b$ 时，$\frac{a}{a+b}+\frac{2b}{a+2b}$ 取得最大值 $4-2\sqrt{2}$

12. 已知函数 $f(x)=a\sqrt{e^x-1}-x+b$，若 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上有零点，则 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的值可以为

A. $\frac{1}{e}$　　B. $\frac{1}{\sqrt{e}}$　　C. $\frac{2}{e}$　　D. 1

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 命题 p：$\exists x<0, e^x-x>1$ 的否定为__________.

14. 函数 $f(x)=(x^2-x+1)\cdot e^{-x}$ 的极大值与极小值的和为__________.

15. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{4}x^2$，P 为直线 $x=1$ 上一点，过点 P 作函数 $y=f(x)$ 图象的两条切线，切点分别为 A,B，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值为__________.

16. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且满足 $2b\cos C=2a-c$. 若 $\triangle ABC$ 的外接圆的面积为 $\frac{16\pi}{3}$，则三角形面积的取值范围是__________.

四、解答题（共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本题满分 10 分）已知函数 $f(x)=\frac{\log_2(1-2x)}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域为集合 A，关于 x 的不等式 $x^2-(a+1)x-2a^2+2a\leqslant 0$ 的解集为 B.

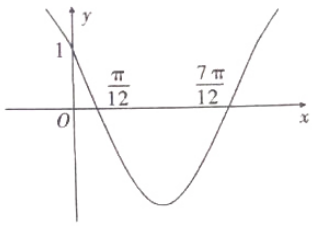
（1）当 $a=1$ 时，求 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup B$；

（2）若 $x\in B$ 是 $x\in\complement_{\mathbf{R}}A$ 的充分条件，求实数 a 的取值范围.

18. (本题满分 12 分)已知函数 $f(x)=A\sin(wx+\varphi)\left(A>0,w\neq 0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式;

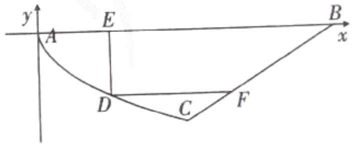
(2)若 $g(x)=f(x)+2\cos wx$,其中 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$,求函数 $g(x)$ 的值域.



19. (本题满分 12 分)2022 年是合肥一六八中学建校 20 周年,学校届时将举行 20 周年校庆活动,其中会建立校史展览馆并向各界校友及友好人士展出一六八中学自建校以来的大事记. 已知展览馆的某一部分平面图如图所示,AB 的长为 18 米,点 C 到 x 轴和 y 轴的距离分别是 6 米和 9 米,其中边界 ACB 是函数 $f(x)$ 图象的一部分,前一段 AC 是函数 $y=k\sqrt{x}$ 图象的一部分,后一段 CB 是一条线段,现要在此处建一个陈列馆,平面图为直角梯形 $DEBF$(其中 BE、DF 为两个底边).

(1)求函数 $y=f(x)$ 的解析式;

(2)求梯形 $DEBF$ 面积的最大值.



20. (本题满分 12 分)在△ABC 中,角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c,且向量 $\vec{m}=(2a-\sqrt{3}c,\sqrt{3}b)$ 与向量 $\vec{n}=(\cos C,\cos B)$ 共线.

(1)求角 B;

(2)请从条件①、条件②、条件③这三个条件选择一个作为已知,使得△ABC 存在且唯一确定,并求 AC 边上中线 BD 的长.

条件①:$a=3,b=\sqrt{3}$;条件②:$b=\sqrt{3},S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$;条件③:$a=3,c=\sqrt{3}$.

21. (本题满分 12 分)设各项均为正数的数列$\{a_n\}$满足$(n+2)a_n^2-na_{n+1}^2+2a_na_{n+1}=0$.

(1)若 $a_1=2$,求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)在(1)的条件下,设 $b_n=\frac{1}{a_{2n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$,数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 S_n,求证:$S_n\geqslant\frac{2n}{3n+1}$.

22. (本题满分 12 分)已知函数 $f(x)=\ln x-ax-b$

(1)若 $a>0$ 时,函数 $f(x)$ 恰好有一个零点,求 ab 的最大值;

(2)讨论函数 $h(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}+b$ 的零点个数.

江淮十校 2023 届高三第二次联考

数学试题参考答案

一、单项选择题:本题共 8 小题. 每小题 5 分,共 40 分.

1－4 CABD　　5－8 DCBC

1. 答案:C

解析:由 $M=\{x|4x^2>1\}$,得 $M=\left\{x|x<-\frac{1}{2}\text{或}x>\frac{1}{2}\right\}$,又 $N=\left\{x|x\geqslant\frac{1}{2}\right\}$,所以 $M\cap N=\left\{x|x>\frac{1}{2}\right\}$,选 C.

2. 答案:A

解析:$\cos x=1$ 即 $x=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 而 $\sin x=0$ 即 $x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以选 A.

3. 答案:B

由题意,$y=\sin x$ 的周期为 2π,$y=\frac{1}{2}\sin 2x$ 的周期为 π,$y=\frac{1}{3}\sin 3x$ 的周期为$\frac{2}{3}\pi$. 所以 $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 的周期为 2π. 选 B.

4. 答案:D

解析:$\because \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2022(n+2)}{2023(n+1)}=1+\frac{2021-n}{2023(n+1)}$,$\therefore$ 当 $n>2021$ 时,$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$;当 $n<2021$ 时,$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$,$n=2021\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$,当 $n=2021$ 时,$a_{2021}=a_{2022}$取得最大值. 故选 D.

5. 答案:D

解析:由题可得$f(x)=\frac{\sin x}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\pi^2}$足偶函数,排除 A,C 两个选项,又 $f(\pi)=0$,当 $x\in(0,\pi)$时,$\frac{\sin x}{x}>0$,$\frac{1}{x^2}>\frac{1}{\pi^2}$,$f(x)>0$,当 $x\in(\pi,2\pi)$时,$\frac{\sin x}{x}<0$,$\frac{1}{x^2}<\frac{1}{\pi^2}$,$f(x)<0$,所以当 $x\in(-2\pi,2\pi)$时,$f(x)$仅有两个零点. 故选 D.

6. 答案:C

解析:由 $\vec{c}=t\vec{a}+\vec{b}=(t+4,2t-2)$,$\vec{c}$ 在 $\vec{a}$ 方向上投影向量模长为$\frac{|\vec{c}\cdot\vec{a}|}{|\vec{a}|}=\frac{|5t|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$,所以 $t=\pm1$,选 C.

7. 答案:B

解析:易证 $e^x\geqslant x+1$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,当且仅当 $x=0$ 时等号成立,取 $x=-0.1$,所以 $e^{-0.1}>0.9$,即 $b>a$. 又易证 $x+1\geqslant\ln(x+2)$对 $x\in(-2,+\infty)$恒成立,当且仅当 $x=-1$ 时等号成立,取 $x=-0.1$,所以 $0.9>\ln 1.9$,即 $a>c$,综上 $b>a>c$,选 B.

8. 答案:C

解析:由题意知:这个人原来持金为 a 斤,

第 1 关收税金为:$\frac{1}{2}a$ 斤;第 2 关收税金为$\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot a=\frac{1}{2\times3}\cdot a$ 斤;

第 3 关收税金为$\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\cdot a=\frac{1}{3\times4}\cdot a$ 斤,

以此类推可得的，第 4 关收税金为$\frac{1}{4\times5}\cdot a$斤，第 5 关收税金为$\frac{1}{5\times6}\cdot a$斤，

所以$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2\times3}a+\frac{1}{3\times4}a+\frac{1}{4\times5}a+\frac{1}{5\times6}a=1$，

即$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)\cdot a=\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot a=1$，解得 $a=\frac{6}{5}$，

又由$f(x)=\begin{cases}f(x-1),x>1\\ \log_5x,0<x\leqslant1\end{cases}$，所以$f\left(\frac{6}{5}\right)=f\left(\frac{6}{5}-1\right)=f\left(\frac{1}{5}\right)=\log_5\frac{1}{5}=-1$.

故选：C.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错得 0 分.

9－12 BC　　ABD　　ABCD　　BCD

9. 答案：BC

解析：对于 A：因为$f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}+x\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}-x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$f'(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，即选项 A 错误；

对于 B：由 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$

$\therefore x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$

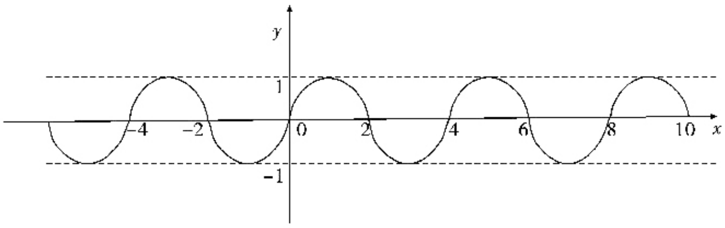
$\therefore f(x)$的对称中心坐标为$\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，B 正确.

对于 C：当$-\frac{5\pi}{12}<x<\frac{\pi}{12}$时，$-\frac{\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$，故$f(x)$在$\left(-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right)$上是增函数，即选项 C 正确；

对于 D：因为$y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]+\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$f(x)$的图象可由 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，再向上平移$\frac{\sqrt{3}}{2}$个单位长度得到. 即选项 D 错误. 故选：BC.

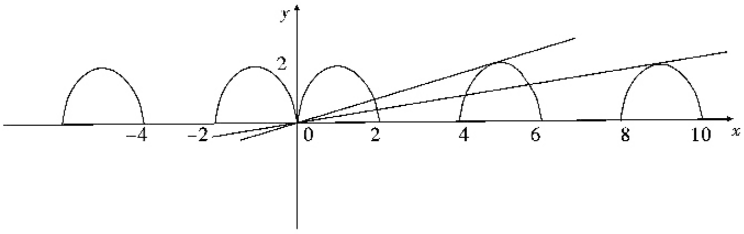
10. 答案：ABD

解析：由 $g(x+2)=g(x-2)$，函数 $g(x)$ 周期为 4. 又 $g(x)$ 为奇函数，而 $x\in[0,2]$ 时，$g(x)=\sqrt{2x-x^2}$，即 $y=\sqrt{2x-x^2}$，变形整理得 $(x-1)^2+y^2=1(y\geqslant0)$. 可得函数 $g(x)$ 图象：



由图像可知，函数 $g(x)$ 的值域为$[-1,1]$且关于 $x=1$ 对称，选项 A、B 正确.

记$f(x)=|g(x)|+g(|x|)$，由$f(-x)=|g(-x)|+g(|-x|)=|-g(x)|+g(|x|)=|g(x)|+g(|x|)=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数，当$x\subset[0,2]$时，$f(x)=2g(x)$，当$x\subset[2,4]$时，$f(x)=0$. $f(x)$图象为：



又方程$|g(x)|+g(|x|)=kx$有四个不同的根,当$x\geqslant 0$时,即直线$y=kx$与函数$y=2g(x)$,$x\in[4k,4k+2]$,$k\in\mathbf{Z}$有四个交点,即直线$y=\frac{k}{2}x$与函数$y=g(x)$,$x\in[4k,4k+2]$,$k\in\mathbf{Z}$有四个交点,数形结合可得$k\in\left(\frac{\sqrt{5}}{10},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$,又因为$f(x)$为偶函数,所以$k\in\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{5}}{10}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{5}}{10},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$,同时$k=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$时恰有三个交点,选项C错误,D正确.

11. 答案:ABCD

解析:其中A:由$\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\dfrac{a+b}{2}=1$,$\therefore\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2$,A正确.

对于B:$\because\ a,b$为正实数,且$a+b=2$,

$\therefore\ \dfrac{1+b}{ab}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{ab}=\dfrac{a+b}{2a}+\dfrac{(a+b)^2}{4ab}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{a}{4b}+\dfrac{b}{4a}+\dfrac{1}{2}=1+\dfrac{3b}{4a}+\dfrac{a}{4b}\geqslant 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

当且仅当$a=3-\sqrt{3}$,$b=\sqrt{3}-1$时,等号成立.$\therefore$ B正确

其中C:由$a+b=1$,即$(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2=1$,由柯西不等式$\sqrt{a}+2\sqrt{b}\leqslant\sqrt{(a+b)(1^2+2^2)}$,即$\sqrt{a}+2\sqrt{b}\leqslant\sqrt{5}$,C正确.

其中D:因为a,b均为正实数,所以$\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{2b}{a+2b}=\dfrac{1}{1+\frac{b}{a}}+\dfrac{2\frac{b}{a}}{1+2\frac{b}{a}}$,令$\frac{b}{a}=t>0$,则$\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{2b}{a+2b}=\dfrac{1}{1+t}+$

$\dfrac{2t}{1+2t}=\dfrac{2t^2+4t+1}{2t^2+3t+1}=1+\dfrac{t}{2t^2+3t+1}=1+\dfrac{1}{2t+\frac{1}{t}+3}\leqslant 4-2\sqrt{2}$,等号成立条件为$a=\sqrt{2}b$. D正确.

12. 答案:BCD

解析:设$f(x)$在区间$[1,2]$上零点为m,则$a\sqrt{e^m-1}-m+b=0$,所以点$P(a,b)$在直线$x\sqrt{e^m-1}+y-m=0$上,由$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}=|OP|$,其中$O$为坐标原点.

又$|OP|\geqslant\dfrac{|0\cdot\sqrt{e^m-1}+0-m|}{\sqrt{(\sqrt{e^m-1})^2+1^2}}=\dfrac{m}{e^{\frac{m}{2}}}$,记函数$g(m)=\dfrac{m}{e^{\frac{m}{2}}}$,$m\in[1,2]$,利用导数可得$g(m)$最小值为$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$,

$\therefore\ \sqrt{a^2+b^2}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

$\therefore$ 选项BCD均满足.

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. $\neg p:\forall x<0,e^x-x\leqslant 1$　14. $\dfrac{3+e}{e^2}$　15. $-\dfrac{25}{16}$　16. $\left(\dfrac{8\sqrt{3}}{3},4\sqrt{3}\right]$

14. 解析：由$f'(x)=\frac{-x^2+3x-2}{e^x}=\frac{-(x-1)(x-2)}{e^x}=0$

$\therefore x=1$ 或 $x=2$

当 $x<1$ 或 $x>2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减

当 $1<x<2$ 时，$f'(x)>0$

$f(x)$单调递增

$\therefore x=1$ 为$f(x)$极小值点

$x=2$ 为$f(x)$极大值点

$\therefore f(x)_{极大值}+f(x)_{极小值}$

$=\frac{3}{e^2}+\frac{1}{e^2}=\frac{3+e}{e^2}$

15. 解析：设$A\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right)$，$B\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right)$. 由 $y=\frac{x^2}{4}$求导得 $y'=\frac{x}{2}$，

则直线 $PA:y=\frac{x_1}{2}x-\frac{x_1^2}{4}$，直线 $PB:y=\frac{x_2}{2}x-\frac{x_2^2}{4}$，联立方程可得 $P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{4}\right)$，

由 P 在直线 $x=1$ 上，得 $x_1+x_2=2$，且$\frac{x_1x_2}{4}<\frac{1}{4}$，即 $x_1x_2<1$.

因而$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left(\frac{x_1-x_2}{2},\frac{x_1^2-x_1x_2}{4}\right)\cdot\left(\frac{x_2-x_1}{2},\frac{x_2^2-x_1x_2}{4}\right)=-\frac{(x_1-x_2)^2}{4}-\frac{x_1x_2(x_1-x_2)^2}{16}$

$=-\frac{(x_1-x_2)^2(4+x_1x_2)}{16}=-\frac{[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2](4+x_1x_2)}{16}=\frac{(x_1x_2-1)(x_1x_2+4)}{4}$

$=\frac{\left(x_1x_2+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}}{4}\geqslant-\frac{25}{16}$.

16. 解析：由 $2b\cos C=2a-c$ $\therefore 2\sin B\cos C=2\sin A-\sin C$ 得 $2\sin B\cos C=2\sin(B+C)-\sin C$

$2\sin B\cos C=2\sin B\cos C+2\cos B\sin C-\sin C$ 所以 $2\cos B\sin C=\sin C$ 因为 $C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$所以 $\sin C>0$

所以 $\cos B=\frac{1}{2}$　而 $B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$　所以 $B=\frac{\pi}{3}$. 又由 $\triangle ABC$ 的外接圆的面积为$\frac{16\pi}{3}$，所以外接圆半径

$2R=\frac{8}{\sqrt{3}}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2\sin A\sin C=\frac{8\sqrt{3}}{3}\cos\left(2A-\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{4\sqrt{3}}{3}$，因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角

形，所以 $A\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，$\triangle ABC$ 的面积取值范围为$\left(\frac{8\sqrt{3}}{3},4\sqrt{3}\right]$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.

17. 解：(1) 由$\begin{cases}1-2x>0\\x+1>0\end{cases}\Rightarrow-1<x<\frac{1}{2}$，所以集合 $A=\left\{x\,\middle|\,-1<x<\frac{1}{2}\right\}$；…………………………………… 1 分

由 $x^2-(a+1)x-2a^2+2a\leqslant0\Rightarrow(x-2a)(x+a-1)\leqslant0$ …………………………………… 2 分

(1) 当 $a=1$ 时，不等式为：$x(x-2)\leqslant0\Rightarrow0\leqslant x\leqslant2$，即集合 $B=\{x|0\leqslant x\leqslant2\}$

又$\complement_{R}A=\left\{x\,\middle|\,x\leqslant-1 \text{ 或 } x\geqslant\frac{1}{2}\right\}$，所以$(\complement_{R}A)\cup B=\{x|x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant0\}$；…………………………………… 4 分

(2)因为 $x\in B$ 是 $x\in \complement_R A$ 的充分条件,所以 B 是 $\complement_R A$ 的子集,$\complement_R A=\left\{x \middle| x\leqslant -1 \text{ 或 } x\geqslant \frac{1}{2}\right\}$;

当 $a=\frac{1}{3}$ 时,$B=\left\{x \middle| x=\frac{2}{3}\right\}$,满足题意; ······ 5 分

当 $a<\frac{1}{3}$ 时,$B=\{x|2a\leqslant x\leqslant 1-a\}$,所以 $\begin{cases}a<\frac{1}{3}\\2a\geqslant\frac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<\frac{1}{3}\\1-a\leqslant -1\end{cases}$ 得 $\frac{1}{4}\leqslant a<\frac{1}{3}$; ······ 7 分

当 $a>\frac{1}{3}$ 时,$B=\{x|1-a\leqslant x\leqslant 2a\}$,所以 $\begin{cases}a>\frac{1}{3}\\1-a\geqslant\frac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a>\frac{1}{3}\\2a\leqslant -1\end{cases}$ 得 $\frac{1}{3}<a\leqslant\frac{1}{2}$; ······ 9 分

综上,实数 a 的取值范围为:$\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$ ······ 10 分

18. 解:(1)由 $\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}=\frac{T}{2}$ 得:$T=\pi=\frac{2\pi}{|w|}\Rightarrow |w|=2$, ······ 1 分

当 $w=2$ 时,$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=A\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi\right)=0\Rightarrow\varphi=-\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$

又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$,又 $f(0)=A\sin\varphi=1\Rightarrow A=-2$(舍去); ······ 3 分

当 $w=-2$ 时,$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=A\sin\left(-2\times\frac{\pi}{12}+\varphi\right)=0\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$

又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$,又 $f(0)=A\sin\varphi=1\Rightarrow A=2$, ······ 5 分

所以,$f(x)=2\sin\left(-2x+\frac{\pi}{6}\right)$. ······ 6 分

(2)$g(x)=f(x)+2\cos wx=2\sin\left(-2x+\frac{\pi}{6}\right)+2\cos(-2x)$ ······ 7 分

$g(x)=2\sin\left(-2x+\frac{\pi}{6}\right)+2\cos(-2x)=2\sin(-2x)\cos\frac{\pi}{6}+2\cos(-2x)\sin\frac{\pi}{6}+2\cos 2x$

$=-\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+2\cos 2x=-\sqrt{3}\sin 2x+3\cos 2x=-2\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ ······ 9 分

又 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$,$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, ······ 11 分

$-2\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in[-2\sqrt{3},-\sqrt{3}]$,即函数 $g(x)$ 的值域为 $[-2\sqrt{3},-\sqrt{3}]$ ······ 12 分

19. 解:(1)$f(x)=\begin{cases}-2\sqrt{x},0\leqslant x\leqslant 9\\\frac{2}{3}x-12,9<x\leqslant 18\end{cases}$ ······ 4 分

(2)设点 $D(m,-2\sqrt{m})(0\leqslant m\leqslant 9)$,所以 $E(m,0)$,$F(18-3\sqrt{m},-2\sqrt{m})$

$\therefore S_{梯形DEBF}=\frac{1}{2}(18-3\sqrt{m}-m+18-m)\cdot 2\sqrt{m}=36\sqrt{m}-3m-2m\sqrt{m}$ ······ 6 分

设 $t=\sqrt{m}(0\leqslant t\leqslant 3)$,令 $g(t)=-2t^3-3t^2+36t$

$g'(t)=-6t^2-6t+36=-6(t^2+t-6)=-6(t+3)(t-2)$ ······ 8 分

$\therefore g(t)$ 在 $(0,2)$ 单调递增,$(2,3)$ 单调递减,$\therefore g(t)_{max}=g(2)=44$

即 $m=4$ 时,梯形 $DEBF$ 面积的最大值为 44. ······ 12 分

20. 解：(1)由向量 $\vec{m}=(2a-\sqrt{3}c,\sqrt{3}b)$ 与向量 $\vec{n}=(\cos C,\cos B)$ 共线得：

$(2a-\sqrt{3}c)\cdot\cos B-\sqrt{3}b\cdot\cos C=0\Rightarrow 2a\cos B=\sqrt{3}c\cdot\cos B+\sqrt{3}b\cdot\cos C$ ………………………… 2分

$\therefore 2\sin A\cos B=\sqrt{3}(\sin C\cos B+\sin B\cos C)=\sqrt{3}\sin A$ ………………………… 3分

又因为 $A\in(0,\pi)$，$\therefore\sin A>0$，

$\therefore\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，又 $B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\dfrac{\pi}{6}$；………………………… 5分

(2)由①可知：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}\Rightarrow\sin A=\dfrac{a\sin B}{b}=\dfrac{3\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

所以，$A=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $A=\dfrac{2\pi}{3}$，$\triangle ABC$ 不唯一确定(舍去) ………………………… 7分

由②可知：$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\Rightarrow 3=a^2+c^2-\sqrt{3}ac$

又 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{2}ac\sin B\Rightarrow ac=3\sqrt{3}$，所以 $a^2+c^2=12$，即 $\begin{cases}a=\sqrt{3}\\c=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=3\\c=\sqrt{3}\end{cases}$

$\triangle ABC$ 不唯一确定(舍去) ………………………… 9分

由③可知：$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\Rightarrow b^2=9+3-2\cdot3\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$，$b=\sqrt{3}$

$B=C=\dfrac{\pi}{6}$，$A=\dfrac{2\pi}{3}$ ………………………… 10分

$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos C=3^2+\dfrac{3}{4}-2\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{21}{4}$

$\therefore BD=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$ ………………………… 12分

21. 解：由 $(n+2)a_n^2-na_{n+1}^2+2a_na_{n+1}=0$ 得：$[(n+2)a_n-na_{n+1}](a_n+a_{n+1})=0$ ………………………… 2分

因为数列 $\{a_n\}$ 为正项数列，所以 $(n+2)a_n-na_{n+1}=0\Rightarrow\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+2}{n}$， ………………………… 3分

所以 $\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\dfrac{a_4}{a_3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{3}{1}\cdot\dfrac{4}{2}\cdot\dfrac{5}{3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n+1}{n-1}(n\geqslant2)\Rightarrow\dfrac{a_n}{a_1}=\dfrac{n(n+1)}{1\times2}(n\geqslant2)$

(1)若 $a_1=2$，则 $a_n=n(n+1)(n\geqslant2)$，又当 $n=1$ 时，$a_1=2$，所以 $a_n=n(n+1)$ ………………………… 5分

(2)由(1)知 $a_{2n-1}=(2n-1)\cdot2n$，所以 $b_n=\dfrac{1}{a_{2n-1}}=\dfrac{1}{(2n-1)2n}=\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}$， ………………………… 6分

$\therefore S_1=\dfrac{1}{2}\geqslant\dfrac{2}{3+1}$ 不等式成立

$\therefore S_n=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}(n\geqslant2)$ ………………………… 7分

$\therefore S_n=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2n}-2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2n}-\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$

$\therefore S_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$ ………………………… 9分

$\therefore 2S_n=\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{2n}\right)+\left(\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{2n-1}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n+k}+\dfrac{1}{2n-k+1}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{n+1}\right)$

$\because\dfrac{1}{n+k}+\dfrac{1}{2n-k+1}=\dfrac{3n+1}{(n+k)(2n-k+1)}\geqslant\dfrac{4}{3n+1}\left(\text{仅在 }k=\dfrac{n+1}{2}\text{ 时取等号}\right)$ ………………………… 11分

$\therefore 2S_n\geqslant\dfrac{4n}{3n+1}$ 即结论 $S_n\geqslant\dfrac{2n}{3n+1}$ 成立. ………………………… 12分

22. 解：(1) $\because f(x)=\ln x-ax-b, x\in(0,+\infty)$

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-a, \because a>0, \therefore f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)\uparrow, \left(\frac{1}{a},+\infty\right)\downarrow$

$\therefore f(x)_{\max}=\ln\frac{1}{a}-1-b$，又当$x\to+\infty$时，$f(x)<0$；当$x\to0$时，$f(x)<0$；………… 2 分

$\therefore f(x)_{\max}=\ln\frac{1}{a}-1-b=0$

$\therefore b=\ln\frac{1}{a}-1, \therefore ab=a\ln\frac{1}{a}-a=-a\ln a-a$ ………… 3 分

设 $g(a)=-a\ln a-a(a>0)$

$\therefore g'(a)=-\ln a-2=0\Rightarrow a=\frac{1}{e^2}, \therefore g(a)$在$\left(0,\frac{1}{e^2}\right)\uparrow, \left(\frac{1}{e^2},+\infty\right)\downarrow$ ………… 4 分

$\therefore g(a)_{\max}=g\left(\frac{1}{e^2}\right)=-\frac{1}{e^2}\ln\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e^2}=\frac{1}{e^2}$

所以 ab 的最大值为$\frac{1}{e^2}$. ………… 6 分

(2) $h(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}+b=\ln x+\frac{1}{2}x^2-ax+\frac{3}{2}$

$\therefore h'(x)=\frac{x^2-ax+1}{x}$,

当 $a\leqslant2$ 时，$h'(x)>0$ 在$(0,+\infty)$恒成立，$h(x)$在$(0,+\infty)\uparrow$

又当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)>0$；当 $x\to0$ 时，$f(x)<0$；

所以，函数 $h(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点；………… 8 分

当 $a>2$ 时，由 $h'(x)=0$ 得方程 $x^2-ax+1=0$ 有两个根，分别为

$x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}<x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，且$\begin{cases}x_1+x_2=a>0\\x_1x_2=1>0\end{cases}$,

$\therefore h(x)$在$(0,x_1)\uparrow, (x_1,x_2)\downarrow, (x_2,+\infty)\uparrow$

即 $h(x_1)$为函数 $h(x)$的极大值，$h(x_2)$为函数 $h(x)$的极小值 ………… 9 分

因此主要讨论极值与零的大小，又 $0<x_1<1$

$h(x_1)=\ln x_1+\frac{1}{2}x_1^2-ax_1+\frac{3}{2}=\ln x_1-\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}$

设 $T(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}, x\in(0,1)$

$\therefore T'(x)=\frac{1}{x}-x>0, T(x)$在$(0,1)\uparrow$

$\therefore T(x)<T(1)=0$，所以在区间$(0,1)$内 $h(x)$没有零点，又 $0>h(x_1)>h(x_2)$,

而 $h(2a)=\ln 2a+2a^2-2a^2+\frac{3}{2}=\ln 2a+\frac{3}{2}>0$

所以在$(0,+\infty)$上 $h(x)$有一个零点；………… 11 分

综上所述：在$(0,+\infty)$上 $h(x)$有一个零点. ………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。