2022～2023年度下学年高二年级第三次联考

数学参考答案

1. C　不同的选法有 $5\times4=20$ 种.

2. D　决定系数 R^2 越大,模型的拟合效果越好;决定系数 R^2 越小,模型的拟合效果越差.

3. C　由全概率公式可得,做对该题的概率为 $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$.

4. D　不同的串法有 $A_5^5=120$ 种.

5. D　设 $x_0\in(a,x_1)$,且 $f'(x_0)=0$. 由图可得,当 $x\in(a,x_0)$,(x_2,b)时,$f'(x)\geqslant0$,当 $x\in(x_0,x_2)$时,$f'(x)<0$. 所以 $f(x)$的单调递增区间为(a,x_0),(x_2,b),单调递减区间为(x_0,x_2). 故 $f(x)$最多有 3 个零点.

6. B　将 $\bar{x}=2$ 代入 $\hat{y}=2x-0.4$,得 $\bar{y}=3.6$. 去除两个样本点$(-3,1)$和$(3,-1)$后,$\overline{X}=\frac{2\times10}{8}=\frac{5}{2}$,$\overline{Y}=\frac{3.6\times10}{8}=\frac{9}{2}$,$\hat{a}=\frac{9}{2}-3\times\frac{5}{2}=-3$,故去除样本点$(-3,1)$和$(3,-1)$后的回归直线方程为 $\hat{y}=3x-3$. 当 $x=4$ 时,$\hat{y}=3\times4-3=9$,则样本$(4,8)$的残差为 $8-9=-1$.

7. A　因为 $P(\overline{A}|\overline{C})=0.9$,所以 $P(A|\overline{C})=1-P(\overline{A}|\overline{C})=0.1$.

   因为 $P(C)=0.005$,所以 $P(\overline{C})=0.995$,

   所以 $P(C|A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{P(A|C)\cdot P(C)}{P(A|C)\cdot P(C)+P(A|\overline{C})\cdot P(\overline{C})}=\frac{0.9\times0.005}{0.9\times0.005+0.1\times0.995}=\frac{9}{208}$.

8. A　设圆锥底面圆的半径为 r,高为 h,则$\frac{\pi r^2h}{3}=\frac{4\pi}{3}$,即 $r^2=\frac{4}{h}$. 圆锥的侧面积为 $\pi r\sqrt{r^2+h^2}=\pi\sqrt{r^2(r^2+h^2)}=\pi\sqrt{\frac{16}{h^2}+4h}$. 令函数 $f(h)=\frac{16}{h^2}+4h$,$f'(h)=4\times\frac{h^3-8}{h^3}$. 当 $h>2$ 时,$f'(h)>0$,$f(h)$单调递增,当 $0<h<2$ 时,$f'(h)<0$,$f(h)$单调递减,所以 $f(h)\geqslant f(2)=12$,所以 $\pi\sqrt{\frac{16}{h^2}+4h}\geqslant2\sqrt{3}\pi$.

9. AB　AB 所对应的成对样本数据呈现出线性相关关系.

10. ABD　由题可知,$\begin{cases}m+n=\frac{1}{2},\\1\times\frac{1}{2}+2n=1,\end{cases}$解得 $m=n=\frac{1}{4}$,A 正确.

    $D(X)=\frac{1}{4}\times(0-1)^2+\frac{1}{2}\times(1-1)^2+\frac{1}{4}\times(2-1)^2=\frac{1}{2}$,B 正确.

    $D(2X+1)=4D(X)=2$,C 错误.

    $E(2X+1)=2E(X)+1=3$,D 正确.

11. BC　因为 $S_{2022}<0$,$S_{2023}>0$,所以 $a_1<0$,$d>0$,故 A 错误.

因为 $S_{2022}=\frac{2022(a_1+a_{2022})}{2}=1011(a_{1011}+a_{1012})<0$,所以 $a_{1011}+a_{1012}<0$.

因为 $S_{2023}=\frac{2023(a_1+a_{2023})}{2}=2023a_{1012}>0$,所以 $a_{1012}>0$,所以 $a_{1011}<0$,$a_{1012}>0$,

所以 S_{1011} 最小,故 B,C 正确.

因为 $a_{1011}+a_{1012}<0$,所以 $a_{1012}<-a_{1011}$,所以 $|a_{1012}|<|a_{1011}|$,故 D 错误.

12. ACD　因为 $g'(x+1)$ 为奇函数,所以 $g'(-x+1)+g'(x+1)=0$①,$g'(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称,则 $g'(1)=0$. $f'(x)=\frac{1}{2}g'(\frac{x+1}{2})+1$,则 $f'(1)=\frac{1}{2}g'(1)+1=1$,A 正确.

因为 $f(x)$ 为偶函数,所以 $f(-x)=f(x)$,则 $-f'(-x)=f'(x)$,即 $f'(x)+f'(-x)=0$,故 $f'(x)$ 的图象关于原点对称,$f'(0)=0$. 因为 $f'(x)=\frac{1}{2}g'(\frac{x+1}{2})+1$,所以 $g'(x)=2f'(2x-1)-2$,$g'(\frac{1}{2})=2f'(2\times\frac{1}{2}-1)-2=-2$,B 错误.

因为 $g'(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称,所以 $g'(\frac{3}{2})=-g'(\frac{1}{2})=2$,C 正确.

因为 $g'(x)$ 的图象关于点 $(\frac{1}{2},-2)$ 对称,所以 $g'(x+1)+g'(-x)=-4$②.

由①②可得 $g'(x+1)-g'(x)=4$,所以 $g'(2)=4+g'(1)=4$,D 正确.

13. 21　$(1+x^2)^7$ 展开式中 x^4 的系数为 $C_7^2=21$.

14. 0.75　$P(60\leqslant X\leqslant 80)=P(80\leqslant X\leqslant 100)=0.25$,所以 $P(X<100)=0.5+0.25=0.75$.

15. 2　因为点 $(2,1)$ 在曲线 $y=\frac{f(x)}{x}$ 上,所以 $\frac{f(2)}{2}=1$,即 $f(2)=2$. 因为切线过点 $(0,0)$,$(2,1)$,所以这条切线的斜率为 $\frac{1}{2}$. 设 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$,则 $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$,$g'(2)=\frac{2f'(2)-f(2)}{2^2}=\frac{1}{2}$,解得 $f'(2)=2$.

16. 371;$\frac{7n^3+9n^2+2n}{3}$　若 $c=d=10$,$n=7$,则该堆垛球的总个数为 $10^2+9^2+\cdots+4^2=\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{3\times4\times7}{6}=371$;

若 $c=2n$,$d=2n+1$,则该堆垛球的总个数为 $2n(2n+1)+(2n-1)2n+(2n-2)(2n-1)+\cdots+(n+1)(n+2)=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{2n+n+1}{2}\times n=\frac{7n^3+9n^2+2n}{3}$.

(其他形式的答案,化简后正确也给分)

17. 解:(1)设 $\{a_n\}$ 的公差为 d,$\{b_n\}$ 的公比为 q,

因为 $a_2+a_5=a_3+9=16$,所以 $a_3=7$,$a_4=9$,$d=a_4-a_3=2$,

故 $a_n=a_3+(n-3)d=2n+1$. ………………………………………………… 2 分

因为 $8b_1=b_4=16$,所以 $q^3=\frac{b_4}{b_1}=8$,即 $q=2$,

故 $b_n=b_1q^{n-1}=2^n$. ………………………………………………………… 4 分

(2)因为$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均为递增数列,且$a_{50}=2\times50+1=101$,$b_6=2^6=64$,$b_7=2^7=128$,……
…………………………………………………………………………………………… 6 分

所以当$k=50+6=56$时,$c_k=101$,故$k=56$. ………………………………………… 8 分

$S_k=S_{56}=a_1+a_2+\cdots+a_{50}+b_1+b_2+\cdots+b_6$

$=\dfrac{(3+101)\times50}{2}+\dfrac{2\times(1-2^6)}{1-2}=2726$. ……………………………………… 10 分

18. 解:(1)由调查问卷知,200 名物理方向的研究生中有 140 名喜欢专利代理方向就业,

所以估计物理方向的研究生喜欢专利代理方向就业的概率为$\dfrac{7}{10}$. ……………………… 2 分

从物理方向的研究生中任选 3 人,设喜欢专利代理方向就业的人数为X,

则$P(X\geqslant2)=C_3^2\times(\dfrac{7}{10})^2\times\dfrac{3}{10}+(\dfrac{7}{10})^3=\dfrac{98}{125}$, ………………………………… 5 分

即估计从物理方向的研究生中任选 3 人,至少有 2 人喜欢专利代理方向就业的概率为$\dfrac{98}{125}$.
…………………………………………………………………………………………… 6 分

(2)零假设为H_0:物理方向的研究生专利代理方向就业意向与性别没有关联.

$\chi^2=\dfrac{200\times(40\times80-20\times60)^2}{140\times60\times100\times100}=\dfrac{200}{21}\approx9.524>7.879$, ……………………………… 9 分

所以根据$\alpha=0.005$的独立性检验,可以推断H_0不成立,

所以物理方向的研究生专利代理方向就业意向与性别有关联,此推断犯错误的概率不大于 0.005. ……………………………………………………………………………………… 12 分

19. 解:(1)若A,B要放入同一个盒子中,根据捆绑法,可看成将 3 个不同的小球放入 4 个不同的盒子中,不同的放法有$4^3=64$种. …………………………………………………… 5 分

(2)第一种情况:4 个小球各自放入 4 个不同的盒子中,共有$A_4^4=24$种放法. ………… 7 分

第二种情况:有 2 个小球放入同一个盒子中,剩余 2 个小球同时放入另一个盒子中,共有$\dfrac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}\cdot C_4^2\cdot A_2^2=36$种放法. ………………………………………………………… 9 分

第三种情况:有 2 个小球放入同一个盒子中,剩余 2 个小球各自放入一个盒子中,共有$C_4^2C_4^3A_3^3=144$种放法. ……………………………………………………………… 11 分

故不同的放法有$24+36+144=204$种. …………………………………………………… 12 分

20. 解:(1)所求概率为$\dfrac{C_3^1C_4^2C_2^1+C_3^2C_4^2}{3^4}=\dfrac{2}{3}$. ………………………………………………… 4 分

(2)X的取值可能为 3,4,5,6,7.

$P(X=3)=\dfrac{3}{3^3}=\dfrac{1}{9}$, ……………………………………………………………………… 5 分

$P(X=4)=\dfrac{C_3^1C_2^1C_3^1}{3^4}=\dfrac{2}{9}$, ………………………………………………………………… 6 分

$P(X=5)=\dfrac{C_3^1C_4^2C_2^1+C_3^1C_4^2C_2^1}{3^5}=\dfrac{8}{27}$, ……………………………………………… 8 分

$P(X=6)=\dfrac{C_3^1C_5^1C_4^2C_2^1}{3^6}=\dfrac{20}{81}$, …………………………………………………… 9 分

$P(X=7)=\frac{C_6^2C_4^2C_3^1}{3^7}=\frac{10}{81}$. ………………………………………………………… 10 分

X 的分布列为

X	3	4	5	6	7
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{20}{81}$	$\frac{10}{81}$

$E(X)=3\times\frac{1}{9}+4\times\frac{2}{9}+5\times\frac{8}{27}+6\times\frac{20}{81}+7\times\frac{10}{81}=\frac{409}{81}$. ………………………… 12 分

21. 解:(1) X 的取值可能为 1,2,3,4,5,6.

$P(X=1)=P(X=6)=(\frac{1}{2})^5=\frac{1}{32}$, ………………………………………………… 1 分

$P(X=2)=P(X=5)=C_5^1\times\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2})^4=\frac{5}{32}$, ………………………………………… 2 分

$P(X=3)=P(X=4)=C_5^2\times(\frac{1}{2})^2\times(\frac{1}{2})^3=\frac{5}{16}$. ………………………………………… 3 分

因为 $Y=|20-5X|$,所以 Y 的取值可能为 0,5,10,15.

$P(Y=0)=P(X=4)=\frac{5}{16}$,

$P(Y=5)=P(X=3)+P(X=5)=\frac{15}{32}$,

$P(Y=10)=P(X=2)+P(X=6)=\frac{3}{16}$,

$P(Y=15)=P(X=1)=\frac{1}{32}$. ………………………………………………………… 5 分

Y 的分布列为

Y	0	5	10	15
P	$\frac{5}{16}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{32}$

$E(Y)=0\times\frac{5}{16}+5\times\frac{15}{32}+10\times\frac{3}{16}+15\times\frac{1}{32}=\frac{75}{16}\approx 4.7$, ……………………………… 7 分

则顾客玩一次游戏立减金额的均值约为 4.7 元.

又因为该商品成本价是 10 元,所以该商品的最低定价应为 15 元. …………………… 8 分

(2)由(1)得 $P(X=3)=\frac{5}{16}$.

进行 79 次高尔顿板试验,设小球落入 3 号球槽的个数为 ξ,则 $\xi\sim B(79,\frac{5}{16})$. ……… 10 分

$\frac{P(\xi=k)}{P(\xi=k-1)}=1+\frac{(79+1)\times\frac{5}{16}-k}{k(1-\frac{5}{16})}=1+\frac{25-k}{\frac{11k}{16}}$.

当 $k<25$ 时,$\frac{P(\xi=k)}{P(\xi=k-1)}>1$,即 $P(\xi=k)>P(\xi=k-1)$;

当 $k=25$ 时，$\frac{P(\xi=k)}{P(\xi=k-1)}=1$，即 $P(\xi=k)=P(\xi=k-1)$；

当 $k>25$ 时，$\frac{P(\xi=k)}{P(\xi=k-1)}<1$，即 $P(\xi=k)<P(\xi=k-1)$.

所以当 $k=25$ 时，$P(\xi=25)=P(\xi=24)$，此时这两项概率均为最大值.

故 3 号球槽中落入 24 或 25 个小球的概率最大. ………………………………………… 12 分

22.(1)解：$g'(x)=\frac{3-x}{4(x+1)}$. ……………………………………………………………… 1 分

当 $-1<x<3$ 时，$g'(x)>0$；当 $x>3$ 时，$g'(x)<0$.

所以 $g(x)$ 在 $(-1,3)$ 上单调递增，在 $(3,+\infty)$ 上单调递减， ………………………… 3 分

则 $g(x)\leqslant g(3)=2\ln 2-\frac{7}{4}$.

故 $g(x)$ 的最大值为 $2\ln 2-\frac{7}{4}$. ………………………………………………………… 4 分

(2)证明：由(1)可得 $g(x)\leqslant 2\ln 2-\frac{7}{4}\approx 2\times 0.69-1.75<0$，

所以 $\ln(x+1)-\frac{x}{4}-1<0$，即 $\ln(x+1)<\frac{x}{4}+1$. ……………………………………… 5 分

要证当 $x>0$ 时，$f(x)<\frac{e^x-1}{x^2}$，可证当 $x>0$ 时，$\frac{x}{4}+1<\frac{e^x-1}{x^2}$. ……………………… 6 分

令函数 $h(x)=\frac{e^x-1}{x^2}-\frac{x}{4}-1$，$h'(x)=\frac{(x-2)e^x+2-\frac{x^3}{4}}{x^3}$.

令函数 $\mu(x)=(x-2)e^x+2-\frac{x^3}{4}$，$\mu'(x)=(x-1)e^x-\frac{3x^2}{4}$.

令函数 $\varphi(x)=(x-1)e^x-\frac{3x^2}{4}$，$\varphi'(x)=x(e^x-\frac{3}{2})$. ………………………………… 8 分

当 $0<x<\ln\frac{3}{2}$ 时，$\varphi'(x)<0$；当 $x>\ln\frac{3}{2}$ 时，$\varphi'(x)>0$.

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,\ln\frac{3}{2})$ 上单调递减，在 $(\ln\frac{3}{2},+\infty)$ 上单调递增.

又 $\varphi(0)=-1<0$，$\varphi(2)=e^2-3>0$，所以存在 $x_0\in(0,2)$，使得 $\varphi(x_0)=0$. …………… 9 分

当 $0<x<x_0$ 时，$\varphi(x)<0$；当 $x>x_0$ 时，$\varphi(x)>0$.

所以 $\mu(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增.

又因为 $\mu(0)=0$，$\mu(2)=0$，所以当 $0<x<2$ 时，$\mu(x)<0$，当 $x>2$ 时，$\mu(x)>0$，

即当 $0<x<2$ 时，$h'(x)<0$，当 $x>2$ 时，$h'(x)>0$.

所以 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增， ………………………………… 10 分

则 $h(x)\geqslant h(2)=\frac{e^2-7}{4}>\frac{2.7^2-7}{4}>0$，所以 $\frac{e^x-1}{x^2}-\frac{x}{4}-1>0$，即 $\frac{x}{4}+1<\frac{e^x-1}{x^2}$，

所以 $\ln(x+1)<\frac{x}{4}+1<\frac{e^x-1}{x^2}$.

故当 $x>0$ 时，$f(x)<\frac{e^x-1}{x^2}$. ………………………………………………………………… 12 分